BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

Alkalmazott algebra

BMETE90MX57 (FELSŐBB MATEMATIKA INFORMATIKUSOKNAK)

Nemnegatív mátrixok

2018-12-02 EIC

Wettl Ferenc
ALGEBRA TANSZÉK

Ismeretek, képességek, célok

- nemnegatív mátrixok osztályozása: pozitív, primitív, irreducibilis, reducibilis,
- Perron- és Perron–Frobenius-tételek, a tételbeli mátrixhatványok kiszámítása, Collatz–Wielandt-tétel,
- reducibilitás és primitívség eldöntése,
- sztochasztikus mátrixok

Mátrixok összehasonlítása

D $\mathbf{A} > \mathbf{B}$, ha $a_{ij} > b_{ij}\ \forall\ i$ és j esetén

pozitív: $\mathbf{A} > \mathbf{O}$ (nemnegatív: $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{O}$), azaz ha $a_{ij} > 0$ ($a_{ij} \geqslant 0$)

Á Néhány észrevétel:

- $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{O} \Leftrightarrow \mathbf{Ax} \geqslant \mathbf{0}$ minden $\mathbf{x} \geqslant 0$ vektorra,
- $\mathbf{A} > \mathbf{O} \Leftrightarrow \mathbf{Ax} > \mathbf{0}$ minden $\mathbf{x} \geqslant 0$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektorra,
- $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{O}$, és $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{y} \geqslant \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{Ax} \geqslant \mathbf{Ay}$.

D A mátrixok pozitivitásának 4 fokozatát definiáljuk:

A pozitív: $\forall i, j \quad a_{ij} > 0$

A primitív: $\exists k\ \forall i, j \quad a_{ij}^{(k)} > 0$

A irreducibilis: $\forall i, j\ \exists k \quad a_{ij}^{(k)} > 0$

A reducibilis: $\exists i, j\ \forall k \quad a_{ij}^{(k)} = 0$

ahol $a_{ij}^{(k)} = [\mathbf{A}^k]_{ij}$.

Pozitív mátrixok

Perron-tétel

T **Perron-tétel: pozitív sajátérték és sajátvektor**

Ha $\mathbf{A} > \mathbf{O}$, *akkor*

1. $r > 0$, *(*$r = \varrho(\mathbf{A})$ *a spektrálsugár),*
2. r *sajátérték egy pozitív sajátvektorral,*
3. $\mathbf{A}$*-nak e pozitív sajátvektor skalárszorosain kívül nincs más nemnegatív sajátvektora.*

D $\mathbf{p}$ Perron-vektor és a $\mathbf{q}$ bal Perron-vektor

$$\mathbf{A}\mathbf{p} = r\mathbf{p}, \ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \qquad \mathbf{q}^\top\mathbf{A} = r\mathbf{q}^\top, \ \sum_{i=1}^{n} q_i = 1$$

T **Perron-tétel: egyszeres és domináns sajátérték**

Ha $\mathbf{A} > \mathbf{O}$, *akkor*

1. *az* r *sajátérték algebrai multiplicitása* 1,
2. r *domináns, azaz minden további* λ *sajátértékre* $|\lambda| < r$.

Nem negatív mátrixok

A Perron-tétel nem áll a nemnegatív mátrixokra

A Perron-tétel pl. ezekre nem áll:

- a $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \geqslant \mathbf{O}$, mindkét sajátértéke 0, ezért spektrálsugara is 0,
- az $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \geqslant \mathbf{O}$ mátrix spektrálsugara 1, de az 1 kétszeres sajátérték, és több lineárisan független pozitív sajátvektor is tartozik hozzá,
- a $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékei 1 és -1, így spektrálsugara ugyancsak 1, de a spektrálkörön több különböző sajátértéke is van,
- az $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixnak nincs pozitív sajátvektora.

Ugyanakkor pl.

- az $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \geqslant \mathbf{O}$, sajátértékei $2, -1$, spektrálsugara 2, ami egyszeres sajátérték, a spektrálkörön ez az egyetlen sajátérték, a hozzá tartozó $(1, 1)$ sajátvektor pozitív, és ennek konstansszorosait kivéve más pozitív sajátvektor nincs, mert a -1-hez tartozó sajátvektor $(1, -2)$.

Mi igaz minden nemnegatív mátrixra

T **Perron–Frobenius-tétel – gyenge változat**

Ha $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{O}$, *akkor az* $r = \varrho(\mathbf{A})$ *spektrálsugár sajátértéke* $\mathbf{A}$*-nak, melyhez tartozik nemnegatív sajátvektor.*

B Alapötlet: $\mathbf{A}_k = \mathbf{A} + \frac{1}{k}\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}.$

T **Collatz–Wielandt-tétel**

Az $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{O}$ *mátrix* r *spektrálsugarára*

$$r = \max_{\substack{\mathbf{x} \\ \mathbf{0} \neq \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}}} \min_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ x_i \neq 0}} \frac{[\mathbf{A}\mathbf{x}]_i}{x_i}, \text{ másként fogalmazva } r = \max_{\substack{\mathbf{x} \\ \mathbf{0} \neq \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}}} \max_{c\mathbf{x} \leqslant \mathbf{A}\mathbf{x}} c$$

B Indító gondolat: ha $\mathbf{A} > \mathbf{O}$, akkor

$$c\mathbf{x} \leqslant \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \rightsquigarrow \quad c\mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = r\mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{x} \quad \rightsquigarrow \quad c \leqslant r.$$

Mi igaz minden nemnegatív mátrixra

T **Nemnegatív mátrixok spektrálsugarának becslése**

Ha $\mathsf{A} \geqslant \mathsf{O}$*, akkor a spektrálsugár a sorösszegek minimuma és maximuma, illetve az oszlopösszegek minimuma és maximuma közé esik, azaz*

$$\min_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right\} \leqslant \varrho(\mathsf{A}) \leqslant \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right\}$$
$$\min_j \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \right\} \leqslant \varrho(\mathsf{A}) \leqslant \max_j \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \right\}$$

K **Konstans sorösszeg vagy oszlopösszeg** Ha $\mathsf{A} \geqslant \mathsf{O}$, és minden sorösszeg c, akkor a spektrálsugár c. (oszlopösszegre is)

T **Reducibilitás szükséges és elégséges feltétele**

Az $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{O}$ *mátrix pontosan akkor reducibilis, ha a sorok és oszlopok azonos permutációjával*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{O} & \mathbf{Z} \end{bmatrix}$$

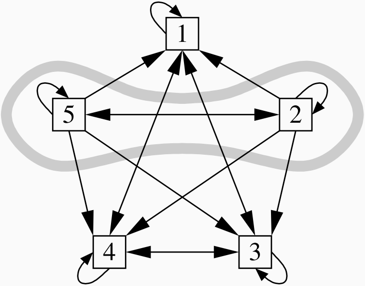
alakra hozható, ahol $\mathbf{X}$ *és* $\mathbf{Z}$ *négyzetes mátrixok (létezik olyan* $\mathbf{P}$ *permutáló mátrix, hogy* $\mathbf{PAP}^\top$ *a fenti alakú).*

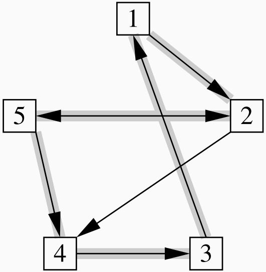
B csak az előjel számít, a nagyság nem.
G irányított gráf: van $i \to j$ él $\iff a_{ij} > 0$,
$\mathbf{G}$ szomszédsági mátrixa $\mathbf{A}$-ból: a pozitív elemeket 1-re cseréljük
$[\mathbf{G}^k]_{ij} > 0 \iff$ az i-edikből megy k-hosszú irányított út a j-edikbe
$\mathbf{A}$ pontosan akkor irreducibilis, ha bármely két csúcs között vezet irányított út, azaz ha a gráf erősen összefüggő

Irreducibilis mátrixok

P reducibilis, vagy irreducibilis?

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 13 & 14 & 0 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \\ 31 & 0 & 33 & 34 & 0 \\ 41 & 0 & 43 & 44 & 0 \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 55 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & 25 \\ 31 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 43 & 0 & 0 \\ 0 & 52 & 0 & 54 & 0 \end{bmatrix}.$$





Permutáló mátrix

- A reducibilis: az első és utolsó sorok és oszlopok cseréje megfelel

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad PAP^T = \left[\begin{array}{cc|ccc} 55 & 52 & 53 & 54 & 51 \\ 25 & 22 & 23 & 24 & 21 \\ \hline 0 & 0 & 33 & 34 & 31 \\ 0 & 0 & 43 & 44 & 41 \\ 0 & 0 & 13 & 14 & 11 \end{array}\right].$$

Más megoldás: az $1 \to 3 \to 4 \to 5 \to 2 \to 1$ csere is megteszi:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad PAP^T = \left[\begin{array}{cc|ccc} 22 & 25 & 21 & 23 & 24 \\ 52 & 55 & 51 & 53 & 54 \\ \hline 0 & 0 & 11 & 13 & 14 \\ 0 & 0 & 31 & 33 & 34 \\ 0 & 0 & 41 & 43 & 44 \end{array}\right].$$

- sorok és oszlopok azonos permutációja, nem elemi sorműveletek!

Irreducibilis mátrixok

- Összefoglalás:

A	algebrai feltétel		gráfelméleti feltétel
pozitív:	$\forall i, j$	$a_{ij} > 0$	irányított teljes gráf
primitív:	$\exists k \; \forall i, j$	$a_{ij}^{(k)} > 0$	$\forall$ két csúcs között fut k-hosszú út
irreducibilis:	$\forall i, j \; \exists k$	$a_{ij}^{(k)} > 0$	erősen összefüggő
reducibilis:	$\exists i, j \; \forall k$	$a_{ij}^{(k)} = 0$	nem erősen összefüggő

Perron–Frobenius-tétel 1.

T

Perron–Frobenius-tétel 1. – sajátérték/sajátvektor

Ha az $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{O}$ *irreducibilis, akkor*

1. $r > 0$,
2. *r sajátértéke* $\mathbf{A}$*-nak, melyhez tartozik pozitív sajátvektor,*
3. $\mathbf{A}$*-nak e pozitív sajátvektor skalárszorosain kívül nincs más nemnegatív sajátvektora,*
4. *r egyszeres sajátérték.*

Primitív és imprimitív mátrixok

m A Perron-tétel állításai közül nem maradt igaz az irreducibilis nemnegatív mátrixokra az, hogy a spektrálkörön csak egyetlen sajátérték van.

T Feltétel mátrix primitivitására Ha $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{O}$ irreducibilis és főátlójában van pozitív elem, akkor primitív.

B A gráfon!

Primitív és imprimitív mátrixok

P Döntsük el, hogy melyik mátrix primitív!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 8 \\ 0 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

M $\mathbf{A}$ reducibilis $\rightsquigarrow$ nem primitív. (a többi irred.)

- $\mathbf{B}$ pozitív $\rightsquigarrow$ primitív.
- $\mathbf{C}^3 = \mathbf{I} \rightsquigarrow$ nem primitív.
- $\mathbf{D}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ reducibilis $\rightsquigarrow$ $\mathbf{D}^{2m}$ is $\rightsquigarrow$ $\mathbf{D}$ nem primitív.

Primitív és imprimitív mátrixok

- $\mathbf{E}$ irreducibilis és a főátlóján van pozitív elem $\rightsquigarrow$ primitív.
- Az $\mathbf{F}$ primitív, mivel $\mathbf{F}^5 = \begin{bmatrix} 27216 & 20412 & 31104 \\ 36288 & 54432 & 57348 \\ 23814 & 46656 & 54432 \end{bmatrix} > \mathbf{O}$,
- Egyszerűbb: $0 \mapsto 0$, pozitív $\mapsto 1$, szorzás $\mapsto$ AND, összeadás $\mapsto$ OR:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sőt, csak négyzetreemelésekkel még gyorsabb:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Eszerint $\mathbf{F}^8 > \mathbf{O}$, tehát $\mathbf{F}$ primitív.

T

Perron–Frobenius-tétel – sajátértékek a spektrálkörön

Ha az $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{O}$ *irreducibilis, akkor*

1. *a spektrálkör határára eső sajátértékek* 1 *multiplicitásúak, és* $\{r, r\varepsilon, \dots, r\varepsilon^{k-1}\}$ *alakba írhatók, ahol* $\varepsilon = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/k}$,
2. $\mathbf{A}$ *primitív* $\iff \forall\lambda \neq r$ *sajátértékére* $|\lambda| < r$,
3. $\mathbf{A}$ *pontosan akkor primitív, ha létezik a* $\lim_{k\to\infty}(\mathbf{A}/r)^k$ *határérték. Ekkor e határérték megegyezik az* $\mathbf{A}$ *spektrálfelbontásában szereplő, az* r *sajátértékhez tartozó vetítő mátrixszal, azaz*
$$\lim_{k\to\infty}(\mathbf{A}/r)^k = \frac{\mathbf{p}\mathbf{q}^\mathsf{T}}{\mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{p}} > \mathbf{0},$$
ahol $\mathbf{p}$ *a Perron-vektor,* $\mathbf{q}$ *a bal Perron vektor.*
4. *Ha* $\mathbf{A}$ *imprimitív, akkor*
$$\lim_{k\to\infty}\frac{\mathbf{I} + (\mathbf{A}/r) + (\mathbf{A}/r)^2 + \dots + (\mathbf{A}/r)^{k-1}}{k} = \frac{\mathbf{p}\mathbf{q}^\mathsf{T}}{\mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{p}} > \mathbf{0}.$$

Sztochasztikus mátrixok

D A nemnegatív vektort sztochasztikusnak nevezzük, ha koordinátáinak összege 1 (azaz 1-normája 1). A nemnegatív $\mathbf{A}$ mátrix sztochasztikus, ha minden oszlopvektora sztochasztikus. (Sorsztochasztikus, ha minden sora).

- Ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{v}$ sztochasztikus, akkor $\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{v}$ is:

$$\sum_{i=1}^{m} u_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j = \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} v_j = 1.$$

- sztochasztikus mátrixok szorzata sztochasztikus mátrix.
- Az $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor sztochasztikus, ha $\mathbf{A}$-nak az $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)$ vektor bal sajátvektora 1 sajátértékkel.

T Ha sztochasztikus mátrix, akkor

1. $\lambda = 1$ egy sajátérték,
2. a spektrálsugara 1, és
3. ha primitív, akkor $\lambda \neq 1$ esetén $|\lambda| < 1$.

Duplán sztochasztikus mátrixok*

D Duplán sztochasztikus, ha sor- és oszlopsztochasztikus is

- Duplán sztochasztikus mátrixok szorzata is duplán sztochasztikus.
- Minden permutáló mátrix duplán sztochasztikus.
- Ha $\mathbf{U} = [u_{ij}]$ unitér, akkor az $\mathbf{A} = \left[|u_{ij}|^2\right]$ mátrix duplán sztochasztikus, ugyanis $\sum_{i=1}^{n} |u_{ij}|^2 = \sum_{j=1}^{n} |u_{ij}|^2 = 1$.

T Frobenius–Kőnig-tétel: Az n-edrendű $\mathbf{A}$ mátrixban pontosan akkor eleme minden kígyónak a 0, ha $\mathbf{A}$ részmátrixai közt van olyan $s \times t$ méretű zérusmátrix, hogy $s + t = n + 1$.

K Minden duplán sztochasztikus mátrixban van legalább egy kígyó, melynek minden eleme pozitív.

T Birkhoff-tétel: Minden n-edrendű duplán sztochasztikus mátrix előáll permutáló mátrixok konvex lineáris kombinációjaként, azaz a duplán sztochasztikus mátrixok az $\mathbb{R}^{n\times n}$ térben olyan konvex poliédert alkotnak, melynek csúcsai a permutáló mátrixok. Azaz

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{P}_i, \text{ ahol } c_1 + c_2 + \ldots + c_k = 1, \; c_i \geqslant 0.$$