BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

# Alkalmazott algebra

BMETE90MX57 (FELSŐBB MATEMATIKA INFORMATIKUSOKNAK)

# Jordan-féle normálalak

2018-11-05 EIC

Wettl Ferenc
ALGEBRA TANSZÉK

# Általánosított sajátvektor

# Ismeretek, képességek, célok

- invariáns altér, blokkdiagonális mátrix és az invariáns altér kapcsolata,
- általánosított sajátvektor, Jordan-blokk, Jordan-lánc, Jordan-bázis, Jordan-bázis keresése $3 \times 3$-as mátrixokra
- Jordan-normálalak, az $\mathbf{A}$ Jordan-normálalakjának meghatározása az $\mathrm{r}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ értékekből (táblázatos módszer)
- minimálpolinom és tulajdonságai, minimálpolinom megadása a Jordán-alakból
- mátrix spektrumán definiált függvények, mátrixfüggvény a Jordan-alakból és az Hermite-polinomból.

# Invariáns alterek

D Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$ altér az $L : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineáris transzformáció (illetve az $L$ valamely bázisbeli $\mathbf{L}$ mátrixának) invariáns altere, ha minden $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ vektorra $L\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ ($\mathbf{L}\mathbf{x} \in \mathcal{U}$).

T Az $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$ altér pontosan akkor invariáns altér az $L$ lineáris transzformációra nézve, ha $\mathcal{U}$ egy $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$ bázisának minden vektorára $L\mathbf{u}_i \in \mathcal{U}$ ($i = 1, \dots, k$).

B ($\Rightarrow$) $\mathcal{U}$ invariáns altér $\rightsquigarrow$ $\mathcal{U}$ minden vektorának képe $\mathcal{U}$-ban van $\rightsquigarrow$ $L\mathbf{u}_i \in \mathcal{U}$ ($i = 1, \dots, k$).

($\Leftarrow$) $\forall\ \mathbf{u}_i : L\mathbf{u}_i \in \mathcal{U}$

L! $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$: $\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \dots + x_k\mathbf{u}_k \rightsquigarrow$

$$L\mathbf{x} = x_1L\mathbf{u}_1 + x_2L\mathbf{u}_2 + \dots + x_kL\mathbf{u}_k \in \mathcal{U},$$

P Tekintsük az $L : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{L}\mathbf{x}$ mátrixleképezést, ahol

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Mutassuk meg, hogy az $\mathcal{U} = \operatorname{span}((1, -1, 2, -1), (1, 2, -1, 2))$ altér invariáns altere az $L$ lineáris transzformációnak.

M $L\mathbf{u} = (1, -2, 3, -2)$, $L\mathbf{v} = (1, 1, 0, 1)$

Elég megmutatni, hogy az $[\mathbf{u} \mid \mathbf{v} \mid L\mathbf{u} \mid L\mathbf{v}]$ rangja 2.

- (még megmutathatjuk azt is, hogy e voktorok és képeik közt mi a lineáris kapcsolat:

$$\mathbf{rref}\,([\mathbf{u} \mid \mathbf{v} \mid L\mathbf{u} \mid L\mathbf{v}]) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix},$$

azaz $L\mathbf{u} = \frac{4}{3}\mathbf{u} - \frac{1}{3}\mathbf{v}$, $\mathbf{v} = \frac{1}{3}\mathbf{u} + \frac{2}{3}\mathbf{v}$.)

# Blokkdiagonális mátrixok

T Blokkdiagonális mátrixok és az invariáns alterek L! az $L : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lin trafó két invariáns altere $\mathcal{U}$ és $\mathcal{W}$. Ha $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$, akkor $L$ mátrixa

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{W} \end{bmatrix}$$

a $\mathcal{V}$ minden olyan bázisában, mely az $\mathcal{U}$ és $\mathcal{W}$ bázisainak uniója.

m Általánosítás: ha $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_k$ a $\mathcal{V}$ vektortér invariáns alterei, és $\mathcal{V} = \mathcal{U}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{U}_k$, akkor $L$ mátrixa blokkdiagonális alakú minden olyan bázisban, mely az alterek bázisainak egyesítése.

m $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \mathcal{U}_1 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}, \\ \mathcal{U}_2 = \{\mathbf{e}_4\}, \\ \mathcal{U}_3 = \{\mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6\} \\ \mathcal{V} = \mathbb{R}^6 = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 \oplus \mathcal{U}_3 \end{array}.$$

B L! $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ és $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-r}\}$ az $\mathcal{U}$ és $\mathcal{W}$ egy-egy bázisa. Mivel $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$, ezért egyesítésük a $\mathcal{V}$ egy bázisát adja. $L$ e bázisra vonatkozó mátrixa a bázisvektorok képvektoraiból alkotott mátrix:

$$L\mathbf{u}_i = u_{i1}\mathbf{u}_1 + \cdots + u_{ir}\mathbf{u}_r + 0\mathbf{w}_1 + \cdots + 0\mathbf{w}_{n-r}$$

$$L\mathbf{w}_j = 0\mathbf{u}_1 + \cdots + 0\mathbf{u}_r + w_{j,r+1}\mathbf{w}_1 + \cdots + w_{j,n}\mathbf{w}_{n-r}$$

ahol $i = 1, \dots, r$, $j = r+1, \dots, n$. Így a mátrix alakja

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{21} & \dots & u_{r1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_{1r} & u_{2r} & \dots & u_{rr} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & w_{r+1,r+1} & w_{r+2,r+1} & \dots & w_{n,r+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & w_{r+1,n} & w_{r+2,n} & \dots & w_{n,n} \end{bmatrix},$$

# Általánosított sajátvektorok és a Jordan-blokk

m Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

mátrix hatása a standard bázison:
$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{e}_1 &= 4\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{A}\mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{A}\mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Átrendezés után:
$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{e}_1 &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_1 \\ (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

- $\mathbf{A} - 4\mathbf{I}$ hatásának diagramja: $\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{e}_1 \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{e}_2 \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{e}_3$
- Eszerint $\mathbf{e}_1$ sajátvektor, és $\mathbf{A}$-nak más sajátvektora nincs, viszont

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2\mathbf{e}_2 &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^3\mathbf{e}_3 &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

# Általánosított sajátvektor

**D** Az $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektort a négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix $\lambda$ sajátértékéhez tartozó általánosított sajátvektorának nevezzük, ha valamilyen $k$ természetes számra $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
$k = 1$ esetén $\mathbf{x}$ sajátvektor. Az általánosított sajátvektorokból álló $\mathbf{x}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ sorozatot Jordan-láncnak nevezzük, ha $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1}$ és $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$.
Egy tér *diszjunkt Jordan-láncokból* álló bázisát Jordan-bázisnak nevezzük.

**m** A Jordan-lánc definíciója korrekt: ha $\mathbf{x}_k$ általánosított sajátvektor, melyre $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$, de $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{k-1}\mathbf{x}_k \neq \mathbf{0}$, akkor minden $i < k$ esetén $\mathbf{x}_{k-i} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^i\mathbf{x}_k$ $(i = 1, \ldots, k-1)$ vektorok is általánosított sajátvektorok. Ez abból következik, hogy

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{k-i}\mathbf{x}_{k-i} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{k-i}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^i\mathbf{x}_k = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$$

# Jordan-lánc és Jordan-bázis konstrukciója

P Keressünk egy Jordan-bázist! Tudjuk, hogy $\chi_{\mathsf{A}}(x) = (4-x)^3$.

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

M A sajátaltér 1-dimenziós, melyet az $\mathbf{x} = (1,-1,1)$ vektor feszít ki.

- $(\mathsf{A}-4\mathsf{I})^3 = \mathsf{O}$, de $(\mathsf{A}-4\mathsf{I})^2 \neq \mathsf{O} \rightsquigarrow \exists \mathbf{x}_3 : (\mathsf{A}-4\mathsf{I})^2\mathbf{x}_3 \neq \mathbf{0}$
-

$$(\mathsf{A}-4\mathsf{I})^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$\rightsquigarrow (\mathsf{A}-4\mathsf{I})^2(x,y,z) = (-x+z, x-z, -x+z) \rightsquigarrow x \neq z$, pl $(1,0,0)$

$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathsf{A}-4\mathsf{I}} \mathbf{x}_1 = (-1,1,-1) \xleftarrow{\mathsf{A}-4\mathsf{I}} \mathbf{x}_2 = (2,-1,2) \xleftarrow{\mathsf{A}-4\mathsf{I}} \mathbf{x}_3 = (1,0,0)$

- $A$ alakja az $\{x_1, x_2, x_3\}$ bázisban

$$J = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

ugyanis $Ax_3 = x_2 + 4x_3$, $Ax_2 = x_1 + 4x_2$, $Ax_1 = 4x_1$, aminek mátrixszorzat alakja:

$$A[x_1 \,|\, x_2 \,|\, x_3] = [x_1 \,|\, x_2 \,|\, x_3] \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

$\rightsquigarrow$ $X^{-1}AX = J$, ahol $X = [x_1 \,|\, x_2 \,|\, x_3]$ ($X$ az $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{X}$ áttérés mátrixa!)

- Konkrétan: $J = X^{-1}AX =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

P $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 4 & 10 & -4 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$, $\chi_{\mathbf{C}}(x) = (4-x)^3$.

M Sajátaltér: $\operatorname{span}((1,0,1),(0,2,3))$

$(\mathbf{C}-4\mathbf{I})^2 = \mathbf{O}$ (legföljebb kettő hosszú láncra számíthatunk),

$\exists \mathbf{x}_2 : (\mathbf{C}-4\mathbf{I})\mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$

- $$\mathbf{C}-4\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 4 & 6 & -4 \\ 4 & 6 & -4 \end{bmatrix},$$

$\rightsquigarrow$ pl. $\mathbf{x}_2 = (1,0,0)$ megfelel.

- $\mathbf{x}_1 = (\mathbf{C}-4\mathbf{I})\mathbf{x}_2 = (-2,4,4)$ (a sajátaltérben van, de különbözik a kapott sajátvektoroktól: $\mathbf{x}_1 = (-2,4,4) = -2(1,0,1) + 2(0,2,3)$.)
- $\mathbf{y}_1$ legyen független $\mathbf{x}_1$-től:

$$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{C}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_1 = (-2,4,4) \xleftarrow{\mathbf{C}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_2 = (1,0,0)$$

$$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{C}-4\mathbf{I}} \mathbf{y}_1 = (1,0,1)$$

- $C$ alakja az $\{x_1, x_2, y_1\}$ bázisban

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

- $J = X^{-1}CX =$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 4 & 10 & -4 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

# Jordan-blokk

**D** Azt a négyzetes mátrixot, melynek főátlójában azonos $\lambda$ értékek, fölötte 1-esek, egyebütt 0-k állnak, Jordan-blokknak nevezzük:

$$\mathbf{J}_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \tag{1}$$

**m** Egy Jordan-blokknak a standard bázis minden vektora általánosított sajátvektora, ugyanis $i > 1$ esetén $\mathbf{J}_\lambda \mathbf{e}_i = \lambda \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{i-1}$, azaz $(\mathbf{J}_\lambda - \lambda\mathbf{I})\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{i-1}$, és így e vektorok egyetlen Jordan-láncot alkotnak: $\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} \mathbf{e}_1 \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} \mathbf{e}_2 \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} \dots \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} \mathbf{e}_n$

**m** Sőt, ha egy mátrix Jordan-blokkokból álló blokkdiagonális mátrix, akkor a standard bázis Jordan-láncokból áll.

# Jordan-féle normálalak

**T** **Jordan-normálalak**

*Bármely* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$*-beli mátrix hasonló egy Jordan-blokkokból álló blokkdiagonális mátrixhoz, azaz* $\exists \mathbf{C} : \mathbf{J} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ *alakja*

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{J}_2 & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{J}_k \end{bmatrix} \tag{2}$$

*ahol $k$ az* $\mathbf{A}$ *független sajátvektorainak maximális száma, és* $\mathbf{J}_i$ *az $i$-edik sajátvektorhoz tartozó Jordan-blokk.*

**D** Az $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{J}\mathbf{C}^{-1}$ alakú felbontását az $\mathbf{A}$ Jordan-felbontásának nev.

**m** $\mathbb{F}$ test, $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ összes sajátértéke $\mathbb{F}$-beli $\Rightarrow$ a tétel igaz.

m minden komplex lineáris transzformációhoz van olyan bázis, melyben mátrixa Jordan-normálalakú (a bázis a C oszlopvektoraiból áll).

m A különböző Jordan-blokkok különböző sajátvektorokhoz tartoznak, de egy sajátérték több Jordan-blokkban is szerepelhet.

P Hány nem hasonló normálalak létezik, ha $\chi(\lambda) = (1 - \lambda)^4$.

M

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# A Jordan-alak egyértelműsége

**T** Egy komplex mátrix Jordan-normálalakja a Jordan-blokkok sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

**B** Elég belátni, hogy bármely két hasonló mátrix Jordan-alakjának meghatárázó adatai a hasonlóságra nézve invariánsak.

- A Jordan-blokkok, és így a Jordan-láncok száma megegyezik a független sajátvektorok maximális számával – ez invariáns.
- TFH $\mathsf{A}$ minden sajátértéke $\lambda$. Pl. $\chi_{\mathsf{A}}(x) = (\lambda - x)^{13}$, és

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \xleftarrow{\mathsf{A}-\lambda\mathsf{I}} & \mathsf{x}_1^1 & \xleftarrow{\mathsf{A}-\lambda\mathsf{I}} & \mathsf{x}_2^1 & \xleftarrow{\mathsf{A}-\lambda\mathsf{I}} & \mathsf{x}_3^1 & \xleftarrow{\mathsf{A}-\lambda\mathsf{I}} & \mathsf{x}_4^1 \\
0 & \xleftarrow{\mathsf{A}-\lambda\mathsf{I}} & \mathsf{x}_1^2 & \xleftarrow{\mathsf{A}-\lambda\mathsf{I}} & \mathsf{x}_2^2 & \xleftarrow{\mathsf{A}-\lambda\mathsf{I}} & \mathsf{x}_3^2 & \xleftarrow{\mathsf{A}-\lambda\mathsf{I}} & \mathsf{x}_4^2 \\
0 & \xleftarrow{\mathsf{A}-\lambda\mathsf{I}} & \mathsf{x}_1^3 & \xleftarrow{\mathsf{A}-\lambda\mathsf{I}} & \mathsf{x}_2^3 & \xleftarrow{\mathsf{A}-\lambda\mathsf{I}} & \mathsf{x}_3^3 & & \\
0 & \xleftarrow{\mathsf{A}-\lambda\mathsf{I}} & \mathsf{x}_1^4 & & & & & & \\
0 & \xleftarrow{\mathsf{A}-\lambda\mathsf{I}} & \mathsf{x}_1^5 & & & & & &
\end{array}
$$

- A leghosszabb lánc 4-elemű: 4 az a legkisebb $s$ kitevő, melyre $(\mathsf{A}-\lambda\mathsf{I})^s=\mathsf{O}$.
  Egy mátrix hatványának zérus volta is invariáns, így hasonló mátrixokra a leghosszab lánc hossza is azonos (ha $\mathsf{A}\sim\mathsf{B}$, akkor $\mathsf{A}-\lambda\mathsf{I}\sim\mathsf{B}-\lambda\mathsf{I}$).
- $n_i$: $\lambda$-hoz tartozó $i$-hosszú Jordan-láncok száma (itt $n_1=2$, $n_2=0$, $n_3=1$, $n_4=2$).
- $(\mathsf{A}-\lambda\mathsf{I})$ hatványainak rangjából

$$\begin{aligned}
n_4 &= \mathrm{r}\left((\mathsf{A}-\lambda\mathsf{I})^3\right)=2\\
n_3+2n_4 &= \mathrm{r}\left((\mathsf{A}-\lambda\mathsf{I})^2\right)=5\\
n_2+2n_3+3n_4 &= \mathrm{r}\left(\mathsf{A}-\lambda\mathsf{I}\right)=8\\
n_1+2n_2+3n_3+4n_4 &= \mathrm{r}\left((\mathsf{A}-\lambda\mathsf{I})^0\right)=n=13,
\end{aligned}$$

  Ez egyértelműen megoldható.

## Egy egyszerű táblázatos megoldási módszer

- Az előző egyenletrendszer megoldható úgy is, hogy alulról kezdve minden egyenletet kivonunk az alatta lévőből, majd ezt még egyszer megismételjük:

$$\begin{aligned} n_4 &= 2 \\ n_3 + 2n_4 &= 5 \\ n_2 + 2n_3 + 3n_4 &= 8 \\ n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 &= 13 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} n_4 &= 2 \\ n_3 + n_4 &= 3 \\ n_2 + n_3 + n_4 &= 3 \\ n_1 + n_2 + n_3 + n_4 &= 5 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} n_4 &= 2 \\ n_3 &= 1 \\ n_2 &= 0 \\ n_1 &= 2 \end{aligned}$$

- Elég ezt csak az egyenletrendszer jobb oldalán lévő számokkal elvégezni:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 \\ \hline 13 & & 8 & & 5 & & 2 & & 0 \\ & 5 & & 3 & & 3 & & 2 & \\ & & 2 & & 0 & & 1 & & 2 \end{array}$$

- Általában

$$
\begin{aligned}
n_s &= \mathrm{r}\left((\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{s-1}\right)\\
n_{s-1}+2n_s &= \mathrm{r}\left((\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{s-2}\right)\\
n_{s-2}+2n_{s-1}+3n_s &= \mathrm{r}\left((\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{s-3}\right)\\
&\vdots\\
n_2+2n_3+\dots+(s-1)n_s &= \mathrm{r}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\\
n_1+2n_2+\dots+(s-1)n_{s-1}+sn_s &= n.
\end{aligned}
$$

a jobb oldalon invariáns értékek vannak, az együtthatómátrix háromszög alakú mellékátlójában csupa egyes van $\rightsquigarrow$ a megoldás egyértelmű, másrészt a megoldások mindegyike egész szám (visszahelyettesítéssel mo-ható).

- több különböző sajátérték esetén: ha $\lambda$ algebrai multiplicitása $m(\lambda)$, akkor $A - \lambda\mathsf{I}$ hatványainak rangjához az összes $\lambda$-tól különböző sor eggyel hozzájárul, így az egyenletrendszerek jobb oldalából $(n - m(\lambda))$-t ki kell vonni.

$$\begin{aligned}
n_s &= m(\lambda) - n + \mathrm{r}\left((\mathsf{A} - \lambda\mathsf{I})^{s-1}\right) \\
n_{s-1} + 2n_s &= m(\lambda) - n + \mathrm{r}\left((\mathsf{A} - \lambda\mathsf{I})^{s-2}\right) \\
n_{s-2} + 2n_{s-1} + 3n_s &= m(\lambda) - n + \mathrm{r}\left((\mathsf{A} - \lambda\mathsf{I})^{s-3}\right) \\
&\vdots \\
n_2 + 2n_3 + \cdots + (s-1)n_s &= m(\lambda) - n + \mathrm{r}(\mathsf{A} - \lambda\mathsf{I}) \\
n_1 + 2n_2 + \cdots + (s-1)n_{s-1} + sn_s &= m(\lambda)
\end{aligned}$$

QED

**P** $A \in \mathbb{C}^{10\times 10}$, $\lambda$ 10-szeres algebrai multiplicitású sajátérték. $A - \lambda I$ hatványainak rangja rendre 5, 2, 1, 0. Írjuk fel a Jordan-normálalakját!

**M** A blokkok száma, ami megegyezik a Jordan-láncok számával 5, mivel $n - \mathrm{r}(A - \lambda I) = 10 - 5 = 5$.

A leghosszabb lánc hossza 4, mivel $A - \lambda I$ legkisebb zérusmátrixot adó hatványa a 4-dik.

Az egyenletrendszer és megoldása, valamint a $J$ Jordan-mátrix:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & \\
\hline
10 & & 5 & & 2 & & 1 & & 0 & \\
 & 5 & & 3 & & 1 & & 1 & & 0 \\
 & & 2 & & 2 & & 0 & & 1 &
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{l}
n_4 = 1 \\
n_3 = 0 \\
n_2 = 2 \\
n_1 = 2
\end{array}
$$

$$
\mathsf{J} = \left[\begin{array}{cccc|cc|cc|c|c}
\lambda & 1 & & & & & & & & \\
 & \lambda & 1 & & & & & & & \\
 & & \lambda & 1 & & & & & & \\
 & & & \lambda & & & & & & \\
\hline
 & & & & \lambda & 1 & & & & \\
 & & & & & \lambda & & & & \\
\hline
 & & & & & & \lambda & 1 & & \\
 & & & & & & & \lambda & & \\
\hline
 & & & & & & & & \lambda & \\
\hline
 & & & & & & & & & \lambda
\end{array}\right]
$$

# Számítások a táblázatos módszerrel

- A táblázat szerkezete általában:

| $k$ | Kitevők $(0, 1, 2, \ldots)$ |
|---|---|
| $\mathrm{r}$ | Az $\mathrm{r}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k$ rangok listája az első ismétlődésig $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ |
| $d_k$ | A legalább $k$-hosszú láncok száma $(k = 1, 2, \ldots)$ |
| $n_k$ | A pontosan $k$-hosszú láncok száma $(k = 1, 2, \ldots)$ |

- Részletezve:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & & 1 & & 2 & & \ldots \\
\hline
\mathrm{r}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^0 = \mathrm{r}(\mathbf{I}) & & \mathrm{r}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) & & \mathrm{r}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^2 & & \ldots \\
 & d_1 & & d_2 & & \ldots & \\
 & & n_1 & & n_2 & & \ldots
\end{array}$$

ahol $d_k = \mathrm{r}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k - \mathrm{r}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{k-1}$, $n_k = d_{k+1} - d_k$

**P** $\mathsf{A} \in \mathbb{C}^{14\times 14}$ karakterisztikus polinomja $(3-\lambda)^5(2-\lambda)^5(1-\lambda)^4$.

$\mathsf{A} - 3\mathsf{I}$ hatványainak rangja rendre: 12, 11, 10, 9;

$\mathsf{A} - 2\mathsf{I}$ hatványainak rangja rendre: 12, 10, 9;

$\mathsf{A} - \mathsf{I}$ hatványainak rangja rendre: 11, 10.

Írjuk fel a Jordan-normálalakját!

**M** $n = 14$, $m(3) = 5$, $m(2) = 5$, $m(1) = 4$.

- a táblázatok:

| 0 | | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | | 12 | | 11 | | 10 | | 9 | | 9 |
| | 2 | | 1 | | 1 | | 1 | | 0 | |
| | | 1 | | 0 | | 0 | | 1 | | |

$\rightsquigarrow n_1 = 1,\ n_4 = 1$

| 0 | | 1 | | 2 | | 3 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | | 12 | | 10 | | 9 | | 9 |
| | 2 | | 2 | | 1 | | 0 | |
| | | 0 | | 1 | | 1 | | |

$\rightsquigarrow n_2 = 1,\ n_3 = 1$

| 0 | | 1 | | 2 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | | 11 | | 10 | | 10 |
| | 3 | | 1 | | 0 | |
| | | 2 | | 1 | | |

$\rightsquigarrow n_1 = 2,\ n_2 = 1$

$$
J = \left[\begin{array}{cccc|c|ccc|cc|cc|c|c}
3 & 1 & & & & & & & & & & & & \\
 & 3 & 1 & & & & & & & & & & & \\
 & & 3 & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & & 3 & & & & & & & & & & \\
\hline
 & & & & 3 & & & & & & & & & \\
\hline
 & & & & & 2 & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 2 & 1 & & & & & & \\
 & & & & & & & 2 & & & & & & \\
\hline
 & & & & & & & & 2 & 1 & & & & \\
 & & & & & & & & & 2 & & & & \\
\hline
 & & & & & & & & & & 1 & 1 & & \\
 & & & & & & & & & & & 1 & & \\
\hline
 & & & & & & & & & & & & 1 & \\
\hline
 & & & & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right]
$$

# Minimálpolinom

D L! $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Minimálpolinomnak nevezünk egy olyan minimális fokszámú $\mu_{\mathbf{A}}$ főpolinomot (1 főegyütthatójú), melyre $\mu_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$.

D Azt mondjuk, hogy a $p$ polinom az $\mathbf{A}$ mátrix annullátora, vagy hogy annullálja azt, ha $p(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$. A minimálpolinom tehát egy legkisebb fokú annullátor főpolinom.

m A nullpolinom nem lehet minimálpolinom, mert nem 1 a főegyütthatója. Az 1 nem lehet minimálpolinom, mert bármely mátrix behelyettesítése után $\mathbf{I}$ lesz (nem $\mathbf{O}$).

m Az egységmátrixra $\mu(x) = x - 1$.

m $\mathbf{A} \sim \mathbf{B} \Rightarrow \mu_{\mathbf{A}} = \mu_{\mathbf{B}}$ (ugyanis $p(\mathbf{B}) = \mathbf{C}^{-1}p(\mathbf{A})\mathbf{C}$, így minden $p$ polinomra $p(\mathbf{A})$ és $p(\mathbf{B})$ egyszerre $\mathbf{O}$, illetve egyszerre nem.)

D (A minimálpolinom invariáns a mátrixok hasonlóságára, így) egy véges dimenziós $\mathcal{V}_{\mathbb{F}}$ vektortéren értelmezett $L : \mathcal{V}_{\mathbb{F}} \to \mathcal{V}_{\mathbb{F}}$ lineáris transzformáció minimálpolinomján azt a minimális fokszámú $\mu_L$ főpolinomot értjük, melyre $\mu_L(L) = O$.

m $\mu_L =$ bármely bázisban fölírt $\mathbf{M}$ mátrixának $\mu_{\mathbf{M}}$ min.pol.-jával.

**T** Minimálpolinom tulajdonságai

*L!* $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$.

1. $\mathbf{A}$-*nak pontosan egy* $\mu_{\mathbf{A}}$ *minimálpolinomja van.*
2. *Bármely p polinomra* $p(\mathbf{A}) = \mathbf{O} \iff \mu_{\mathbf{A}} \mid p$.
3. $\mu_{\mathbf{A}} \mid \chi_{\mathbf{A}}$
4. $\mathbf{A}$ *minden sajátértéke gyöke* $\mu_{\mathbf{A}}$*-nak.*

**m** Ha $\chi_{\mathbf{A}}(x) = \prod_i (x - \lambda_i)^{a_i}$, akkor a 3.-beli oszthatóság miatt $\mu_{\mathbf{A}}(x) = \prod_i (x - \lambda_i)^{m_i}$, ahol $1 \leqslant m_i \leqslant a_i$, és $a_i$ a $\lambda_i$ algebrai multiplicitása.

**m** Ha $\mathbf{A}$ nilpotens, ahol $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$, de $\mathbf{A}^{k-1} \neq \mathbf{O}$, akkor $\mu_{\mathbf{A}}(x) = x^k$, ugyanis $x^k$ annullátor, így a minimálpolinom csak valamely osztója lehet. Az osztói viszont mind $x^m$ alakúak, ahol $m \leqslant k$, de azok $m < k$ esetén nem annullátorok.

# Minimálpolinom tulajdonságai

B 1. $\exists$ annullátor $\rightsquigarrow$ $\exists$ főpolinom annullátor
Tfh $p$ és $q$ két különböző minimális fokszámú főpolinom, melyekre $p(\mathbf{A}) = q(\mathbf{A}) = \mathbf{O} \rightsquigarrow (p - q)(\mathbf{A}) = p(\mathbf{A}) - q(\mathbf{A}) = \mathbf{O} \rightsquigarrow p = q$.
2. $\mu_{\mathbf{A}} \mid p \rightsquigarrow p = \mu_{\mathbf{A}} q$ vmilyen $q$ pol.-ra $\rightsquigarrow p(\mathbf{A}) = \mu_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) q(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$.
$p(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$ és $p = \mu_{\mathbf{A}} q + r$, ahol $r$ foka kisebb, mint $\mu_{\mathbf{A}}$ foka, másrészt $\mathbf{O} = p(\mathbf{A}) = \mu_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) q(\mathbf{A}) + r(\mathbf{A}) \rightsquigarrow r(\mathbf{A}) = \mathbf{O} \rightsquigarrow r = 0$.
3. az előzőekből
4. $(\lambda, \mathbf{x})$ sajátpár $\rightsquigarrow \mathbf{A}^k \mathbf{x} = \lambda^k \mathbf{x}$ $(k \in \mathbb{N}_0) \rightsquigarrow \forall$ $p$-re $p(\mathbf{A})\mathbf{x} = p(\lambda)\mathbf{x}$.
$\mu_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})\mathbf{x} = \mu_{\mathbf{A}}(\lambda)\mathbf{x}$, de $\mu_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$, és $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, ezért $\mu_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$.

T **Diagonalizálhatóság és minimálpolinom**

$\mathbf{A}$ *pontosan akkor diagonalizálható, ha minimálpolinomja különböző lineáris tényezők szorzata.*

# Példák minimálpolinomra

P Határozzuk meg a $\chi_{\mathsf{A}}$ és $\mu_{\mathsf{A}}$ polinomokat!

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

M $\chi_{\mathsf{A}}(x) = \mu_{\mathsf{A}}(x) = x^6$.

# Példák minimálpolinomra

P

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

M $\chi_A(x) = \chi_B(x) = (x-1)^4$ Minimálpolinom lehet $(x-1)^k$, ahol $k \leqslant 4$. Mivel

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

és $A^2 - 2A + I = O$, de $A - I \neq O$, ezért $\mu_A(x) = (x-1)^2$.
$B^2 - 2B + I = O$, de $B - I \neq O$, ezért $\mu_B(x) = (x-1)^2$.

# Frobenius kísérő mátrix*

**Á** Bármely $\chi(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0 \in \mathbb{F}[x]$ polinomhoz létezik olyan $\mathbf{C} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ mátrix, melynek $\chi$ (vagy $-\chi$) a karakterisztikus polinomja. Egy ilyen mátrix a

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

mátrix.

**D** E mátrixot a polinom *kísérő mátrixának* nevezzük.

B A karakterisztikus polinomot adó determinánsban alulról minden sor $x$-szeresét a fölötte lévőhöz adva kapjuk, hogy

$$\chi_C(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & -x & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} - x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\chi(x) \\ 1 & 0 & \dots & 0 & ? \\ 0 & 1 & \dots & 0 & ? \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} - x \end{vmatrix}$$

Így $\chi_C(x)$ előjelszorzót nem számítva megegyezik a megadott $\chi(x)$ polinommal.

Á A kísérő mátrix minimálpolinomja megegyezik karakterisztikus polinomjával (egy $-1$ szorzó erejéig).

B Tetszőleges, de nem csupa zérus $c_j$ konstansokra

$$\left(\sum_{j=0}^{n-1} c_j \mathsf{C}^j\right) \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix},$$

azaz nincs $n$-nél alacsonyabb fokú annullátor, tehát $\mu(\mathsf{C}) = (-1)^n \chi(\mathsf{C})$.

# Diagonalizálható mátrixok függvényei

**m** Ha $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ és $\mathsf{D}$ diagonális, továbbá $\mathsf{D}$ főátlóbeli elemei benne vannak a hatványsor konvergenciatartományában, akkor

$$\begin{aligned} f(\mathsf{D}) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathsf{D}^k = \mathrm{diag}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k d_1^k, \dots, \sum_{k=0}^{\infty} a_k d_n^k\right) \\ &= \mathrm{diag}(f(d_1), \dots, f(d_n)). \end{aligned}$$

Eszerint például bármely diag.-ható $\mathsf{A}$ mátrixra értelmezhető az $\mathrm{e}^{\mathsf{A}}$:

$$e^{\mathsf{A}} = \mathsf{I} + \mathsf{A} + \frac{\mathsf{A}^2}{2!} + \dots + \frac{\mathsf{A}^n}{n!} + \dots$$

Hasonlóképp definiálható az $\ln(\mathsf{I} + \mathsf{A})$ mátrixfüggvény is, az

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \qquad |x| < 1$$

felhasználásávak kapjuk, hogy

$$\ln(\mathsf{I} + \mathsf{A}) = \mathsf{A} - \frac{\mathsf{A}^2}{2} + \frac{\mathsf{A}^3}{3} - \frac{\mathsf{A}^4}{4} + \dots,$$

ahol $\varrho(\mathsf{A}) < 1$.

m Egy hatványsorba fejthető függvénynek egy diagonális mátrixban – és így bármely diagonalizálható mátrixban – fölvett értékét a függvénynek csak a sajátértékekben való viselkedése befolyásolja.

m A Cayley–Hamilton-tétel szerint minden mátrix kielégíti saját karakterisztikus egyenletét, így egy $n$-edrendű mátrix minden hatványa legföljebb $n-1$-edik hatványok lineáris kombinációjával helyettesíthető, azaz a függvény értéke egy polinomba való helyettesítéssel is kiszámolható.

Á Legyen az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix Jordan-felbontása $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{J}\mathbf{C}^{-1}$ és $p \in \mathbb{C}[x]$ egy tetszőleges polinom. Ekkor

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{C}p(\mathbf{J})\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}\begin{bmatrix} p(\mathbf{J}_1) & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & p(\mathbf{J}_2) & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & p(\mathbf{J}_k) \end{bmatrix}\mathbf{C}^{-1},$$

m Tegyük fel, hogy az $f$ függvény $\lambda$ körül Taylor-sorba fejthető, azaz

$$f(x) = f(\lambda) + f'(\lambda)(x-\lambda) + \ldots + \frac{f^{(m)}(\lambda)}{m!}(x-\lambda)^m + \ldots$$

és legyen $\mathbf{J} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ egy Jordan-blokk, azaz

$$\mathbf{J} = \lambda\mathbf{I} + \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

- Mivel $\mathbf{N}^n = \mathbf{O}$, fenn kell álljon az

$$f(\mathbf{J}) = f(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{N}) = f(\lambda)\mathbf{I} + f'(\lambda)\mathbf{N} + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!}\mathbf{N}^{n-1} \qquad (3)$$

összefüggés – ha egyáltalán van értelme az $f(\mathbf{J})$ kifejezésnek. Tehát az $f$ függvénynek csak a Jordan-mátrix rendjénél kisebb rendű deriváltjai játszanak szerepet a függvényértékben.

# Mátrixfüggvény a Jordan-alakból

# Spektrumon definiált függvény

**D** Legyen az **A** mátrix spektruma $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$, a $\lambda_i$ sajátértékhez tartozó legnagyobb Jordan-blokk rendjét jelölje $m_i$. Azt mondjuk, hogy $f$ definiálva van az **A** spektrumán, ha az

$$f^{(j)}(\lambda_i), \quad j = 0, 1, \dots, m_i - 1,\ i = 1, \dots, k$$

értékek léteznek. Azt mondjuk, hogy ezek az értékek az $f$ értékei az **A** spektrumán.

**m** Minden függvény, mely **C** minden pontjában akárhányszor differenciálható, tetszőleges mátrixra értelmezve van annak spektrumán. Így minden polinom értelmezve van minden mátrix spektrumán, ami összhangban lesz azzal, hogy minden négyzetes mátrixnak bármely polinomfüggvénye értelmezve van.

# Mátrixfüggvény a Jordan-alakból

**D** Legyen $\mathsf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ Jordan-felbontása $\mathsf{A} = \mathsf{C}\mathsf{J}\mathsf{C}^{-1}$, ahol $\mathsf{J} = \mathrm{diag}(\mathsf{J}_1, \dots, \mathsf{J}_k)$ a Jordan-féle normálalakja, és $n_i$ jelöli a $\mathsf{J}_i$ blokk rendjét. Ekkor

$$f(\mathsf{A}) = \mathsf{C}f(\mathsf{J})\mathsf{C}^{-1} = \mathsf{C}\,\mathrm{diag}(f(\mathsf{J}_1), \dots, f(\mathsf{J}_k))\mathsf{C}^{-1},$$

ahol

$$f(\mathsf{J}_i) = \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{f''(\lambda_i)}{2!} & \dots & \frac{f^{(n_i-2)}(\lambda_i)}{(n_i-2)!} & \frac{f^{(n_i-1)}(\lambda_i)}{(n_i-1)!} \\ 0 & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \dots & \dots & \frac{f^{(n_i-2)}(\lambda_i)}{(n_i-2)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f'(\lambda_i) & \frac{f''(\lambda_i)}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f(\lambda_i) \end{bmatrix} \tag{4}$$

- Egyszerű képletbehelyettesítéssel $f(x) = x^3$ esetén

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} f(2) & f'(2) \\ 0 & f(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

- Az $f(x) = \mathrm{e}^x$ függvény esetén, ha

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{akkor} \quad \mathrm{e}^{\mathsf{A}} = \begin{bmatrix} e^2 & e^2 & \frac{e^2}{2} \\ 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix} = e^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Általában a $\lambda$-hoz tartozó Jordan-blokkra

$$\mathsf{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} \text{ esetén } e^{\mathsf{J}} = e^{\lambda} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & 1 & \dots & \frac{1}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{1}{(n-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

# Mátrix exponenciális függvénye

**P** Legyen

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

Határozzuk meg az $e^{\mathsf{A}}$ mátrixot!

**M** $\chi_{\mathsf{A}}(x) = x^3 + 10x^2 + 32x + 32 = (x+2)(x+4)^2$,

$$\mathsf{J} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathsf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$e^{\mathsf{A}} = \mathsf{P}e^{\mathsf{J}}\mathsf{P}^{-1} = \frac{1}{2e^4}\begin{bmatrix} e^2+1 & 2e^2-2 & e^2-1 \\ e^2-1 & 2e^2 & e^2-1 \\ 1-e^2 & 2-2e^2 & 3-e^2 \end{bmatrix}$$

**P** Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ mátrix Jordan-féle normálalakját, $\mathbf{J}$-t, és az $\mathbf{A}^{100}$, $e^{\mathbf{J}}$, $e^{3\mathbf{A}}$ mátixokat.

**M** $\chi(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda + 5)$. A 2-höz tartozó s.v.: $(1, 0, 0)$, a $-5$-höz tartozó $(-9/7, 0, 1) \rightsquigarrow \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$.

A 2-höz tartozó másik általánosított sajátvektor:

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1, \quad \text{azaz} \quad \begin{bmatrix} 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ennek egy megoldása $\mathbf{x}_2 = (0, \frac{1}{3}, 0) \rightsquigarrow$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9/7 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9/7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Mivel $(x^{100})' = 100x^{99}$, $(e^x)' = e^x$, $(e^{3x})' = 3e^{3x}$, ezért

$$\mathrm{J}^{100} = \begin{bmatrix} 2^{100} & 100 \cdot 2^{99} & 0 \\ 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{100} \end{bmatrix}, \quad e^{\mathrm{J}} = \begin{bmatrix} e^2 & e^2 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-5} \end{bmatrix},$$

$$e^{3\mathrm{J}} = \begin{bmatrix} e^6 & 3e^6 & 0 \\ 0 & e^6 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-15} \end{bmatrix}.$$

Innen az $\mathbf{A}^{100} = \mathbf{C}\mathrm{J}^{100}\mathbf{C}^{-1}$ és $e^{3\mathbf{A}} = \mathbf{C}e^{3\mathrm{J}}\mathbf{C}^{-1}$ felhasználásával

$$\mathbf{A}^{100} = \begin{bmatrix} 2^{100} & 100 \cdot 3 \cdot 2^{99} & \frac{9}{7}(2^{100} - 5^{100}) \\ 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{100} \end{bmatrix},$$

$$e^{3\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} e^6 & 9e^6 & \frac{9}{7}(e^6 - e^{-15}) \\ 0 & e^6 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-15} \end{bmatrix}.$$

# Mátrixfüggvény Hermite-polinommal

# Spektrumon azonos értékeket adó polinomok

Á Tetszőleges $p$ és $q$ polinomokra és $\mathsf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrixra $p(\mathsf{A}) = q(\mathsf{A})$, pontosan akkor teljesül, ha $p$ és $q$ értékei $\mathsf{A}$ spektrumán azonosak.

B Ha $p(\mathsf{A}) = q(\mathsf{A})$, akkor $h = p - q$ annullálja $\mathsf{A}$-t, így $h$ osztható a minimálpolinommal, így a minimálpolinommal együtt $h$ értékei is nullák az $\mathsf{A}$ spektrumán.

Ha $p$ és $q$ értékei $\mathsf{A}$ spektrumán azonosak, akkor a $h = p - q$ polinom értékei mind nullák. Az ilyen polinomok alakja $\prod_{i=1}^{s}(x - \lambda_i)^{m_i} g(x)$, azaz $h = \mu g$, tehát $h$ annullálja $\mathsf{A}$-t, így $p(\mathsf{A}) = q(\mathsf{A})$.

# Mátrixfüggvény kiszámítása polinominterpolációval

D Legyen $\mathsf{A}$ minimálpolinomja $\mu_{\mathsf{A}}$, és tegyük fel, hogy az $f$ függvény definiálva van $\mathsf{A}$ spektrumán. Ekkor $f(\mathsf{A}) := p(\mathsf{A})$, ahol $p$ az a polinom, melynek foka kisebb $\mu_{\mathsf{A}}$ fokánál, és amely eleget tesz a

$$p^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_i), \quad j = 0, 1, \dots, m_i - 1,\ i = 1, \dots, k \tag{5}$$

feltételeknek, ahol $m_i$ a $\lambda_i$ sajátértékhez tartozó legnagyobb Jordan-blokk rendjét jelöli. E polinom egyértelműen létezik, ezt nevezzük Hermite-polinomnak.

- Ha **A**-nak minden sajátértéke egyszeres algebrai multiplicitású, azaz $s = n$ és $m_i = 1$ minden $i$-re, akkor az Hermite-polinom az ismert Lagrange-féle interpolációs polinomot adja:

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} \left( f(\lambda_i) \prod_{j \neq i} \frac{x - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} \right). \tag{6}$$

  Ha **A**-nak csak egyetlen sajátértéke $\lambda$, melynek $n$ az algebrai multiplicitása ($s = 1$, $m_1 = n$), akkor $f$ Taylor-polinomját kapjuk:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n-1} f^{(j)}(\lambda) \frac{(x - \lambda)^j}{j!}.$$

- Az Hermite-polinom ugyan egyértelmű, de nehéz meghatározni, ha nem ismerjük a minimálpolinom fokát. Bármely más polinom is megfelel, mely kielégíti az (5) feltételeket, azaz kereshetjük a karakterisztikus polinom fokánál kisebb fokúak közt.

# Polinom kiértékelése alacsonyabb fokúval

**P** L $f(x) = x^3$, $\mathsf{A} = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$, $f(\mathsf{A}) = ?$. Ugyan $f$ polinom, de mivel $\mu_{\mathsf{A}}(x) = (x-2)^2$, azaz a minimálpolinom kisebb fokú, ezért van olyan elsőfokú polinom is, mely $\mathsf{A}$-ban azonos értéket ad. E polinom az $x^3 : \mu_{\mathsf{A}}(x)$ osztás maradéka. Mivel $x^3 = (x-2)^2(x+4) + (12x - 16)$, a maradék $12x - 16$, ezért

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^3 = 12 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 16 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

**P** Keressük meg az $f(x) = x^3$ Hermite-féle interpolációs polinomját

$$\begin{aligned} f(2) = 8 = p(2) = 2a + b \\ f'(2) = 12 = p'(2) = a. \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad a = 12, b = -16.$$

**P** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, e^{\mathbf{A}} = ?$

**M** $\mu_{\mathbf{A}}(x) = (x-2)^3 \rightsquigarrow$ Hermite-polinom: $p(x) = ax^2 + bx + c$

$$\begin{aligned} e^x|_2 &= e^2 = p(2) = 4a + 2b + c \\ (e^x)'|_2 &= e^2 = p'(2) = 4a + b \qquad \rightsquigarrow\ a = e^2/2, b = -e^2, c = e^2, \rightsquigarrow \\ (e^x)''|_2 &= e^2 = p''(2) = 2a. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}} &= p(\mathbf{A}) = \frac{e^2}{2}\mathbf{A}^2 - e^2\mathbf{A} + e^2\mathbf{I} \\ &= \frac{e^2}{2}\begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - e^2\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + e^2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = e^2\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

# Exponenciális függvény Hermite-polinommal

**P** Számítsuk ki az $e^{\mathsf{A}}$ mátrixot ha

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

**M** $\chi_{\mathsf{A}}(x) = (x+2)(x+4)^2$, Jordan-alakja $\mathrm{diag}(-2,-4,-4)$, a minimálpolinom $\mu_{\mathsf{A}}(x) = (x+2)(x+4) = x^2+6x+8$.
olyan elsőfokú $p(x) = ax+b$ alakú polinomot keresünk, melyre

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-2} &= p(-2) = -2a+b \\ \mathrm{e}^{-4} &= p(-4) = -4a+b. \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} a &= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{-4}), \\ b &= 2\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{-4}, \end{aligned}$$

$$\mathrm{e}^{\mathsf{A}} = a\mathsf{A} + b\mathsf{I} = \frac{1}{2\mathrm{e}^4}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^2+1 & 2\mathrm{e}^2-2 & \mathrm{e}^2-1 \\ \mathrm{e}^2-1 & 2\mathrm{e}^2 & \mathrm{e}^2-1 \\ 1-\mathrm{e}^2 & 2-2\mathrm{e}^2 & 3-\mathrm{e}^2 \end{bmatrix}.$$

P $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 4 & 10 & -4 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathrm{e}^{\mathsf{A}} = ?$

M $\chi(x) = (4-x)^3$, $\mu(x) = (4-x)^2$ (korábbi feladatból)

Keresünk egy $p(x) = ax + b$ polinomot, melyre

$$\begin{aligned} \exp(4) = \mathrm{e}^4 = p(4) = 4a + b \\ \exp'(4) = \mathrm{e}^4 = p'(4) = a \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad a = \mathrm{e}^4,\ b = -3\mathrm{e}^4$$

- Tehát

$$\mathrm{e}^{\mathsf{A}} = \mathrm{e}^4\mathsf{A} - 3\mathrm{e}^4\mathsf{I} = \mathrm{e}^4 \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 4 & 7 & -4 \\ 4 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

# A definíciók ekvivalenciája*

**T** A mátrixfüggvény kiszámítására adott fenti két definíció ekvivalens.

**B** A „Hermite”-definíció szerint $f(\mathbf{A}) = p(\mathbf{A})$ és bármely más polinom is megadja $f(\mathbf{A})$-t, ha kielégíti az (5) feltételeket.

Ha $\mathbf{A} \sim \mathbf{J}$, akkor $f(\mathbf{A}) = p(\mathbf{A}) = p(\mathbf{C}\mathbf{J}\mathbf{C}^{-1}) = \mathbf{C}p(\mathbf{J})\mathbf{C}^{-1}$, ezért elég a Jordan-alakokra ellenőrizni az ekvivalenciát.

A „Jordan”-definícióban $f$-nek épp azok a deriváltjai szerepelnek azokban a sajátértékekben kiértékelve, amelyek az (5) feltételekben is szerepelnek. Így elég csak azt ellenőrizni, hogy egy Jordan-blokk Hermite-polinomja megegyezik-e a „Jordan”-definícióban szereplővel. Ezt a polinom Taylor-polinomjára fölírt (3) képlet igazolja.