BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

Alkalmazott algebra

BMETE90MX57 (FELSŐBB MATEMATIKA INFORMATIKUSOKNAK)

Diagonalizálhatóság

2018-10-29 EIC

Wettl Ferenc

ALGEBRA TANSZÉK

Ismeretek, képességek, célok

- Sajátérték, sajátaltér, sajátfelbontás, spektrálfelbontás, algebrai és geometriai multiplicitás fogalma és kiszámítása „tankönyvi” módszerrel, Gershgorin-körök, domináns sajátérték, domináns főátlójú mátrix, hatványmódszer.
- Speciális mátrixok sajátértékei, mátrix hatványainak sajátértékei, Cayley–Hamilton-tétel.
- A hasonlóságra invariáns újabb tulajdonságok, feltételek a diagonalizálhatóságra, és az ortogonális (unitér) diagonalizálhatóságra, Schur-felbontás.
- Kvadratikus formák, főtengelytranszformáció, definitség, főminorok, kongruencia, Sylvester-féle tehetetlenségi törvény.
- Pozitív szemidefinit és definit mátrixok faktorizációi, Cholesky-felbontás.

Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér

D A λ szám az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértéke, ha létezik olyan nemnulla $\mathbf{x}$ vektor, melyre $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Az ilyen $\mathbf{x}$ vektorokat az $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékhez tartozó sajátvektorainak, a $(\lambda, \mathbf{x})$ párokat pedig az $\mathbf{A}$ sajátpárjainak nevezzük.

Á A λ-hoz tartozó sajátvektorok a nullvektorral együtt alteret alkotnak, mely megegyezik $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$-vel.

D ez a sajátaltér, azaz $\mathcal{V}_\lambda = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\}$.

D karakterisztikus egyenlet: $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$

Á Ha az n-edrendű $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei λ_1,..., λ_n, akkor

$$\det(\mathbf{A}) = \lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_n$$
$$\operatorname{trace}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

a karakterisztikus polinomban: a determináns a konstans tag, a nyom a $(-\lambda)^{n-1}$ együtthatója.

Az algebrai és a geometriai multiplicitás

D algebrai multiplicitás k, ha λ a karakterisztikus egyenlet k-szoros gyöke

D geometriai multiplicitás d, ha a sajátaltér dimenziója d

T $1 \leq d \leq k$

Sajátértékek és a mátrix hatványai

T Az $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor invertálható, ha a 0 nem sajátértéke.

B $\det(\mathbf{A} - 0\mathbf{I}) \neq 0$

T Ha λ az $\mathbf{A}$ mátrix egy sajátértéke és $\mathbf{x}$ egy hozzá tartozó sajátvektor, akkor bármely egész n esetén λ^n sajátértéke az $\mathbf{A}^n$ mátrixnak és $\mathbf{x}$ egy hozzá tartozó sajátvektor, amennyiben λ^n és $\mathbf{A}^n$ is értelmezve van.

B $n = 0$, $n = 1$: trivi, $n > 2$:
$\mathbf{A}^k\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\lambda^{k-1}\mathbf{x}) = \lambda^{k-1}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \lambda^{k-1}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^k\mathbf{x}.$
invertálható: $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x},$ amiből $\frac{1}{\lambda}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x},$ azaz $\lambda^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}.$
negatív kitevő: $\mathbf{A}^k\mathbf{x} = \lambda^k\mathbf{x},$ amiből $\lambda^{-k}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-k}\mathbf{x}.$

T Mátrix hatványainak hatása $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $(\lambda_1, \mathbf{x}_1)$, ... $(\lambda_k, \mathbf{x}_k)$ sajátpárok. Ha $\mathbf{v} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \ldots + c_k\mathbf{x}_k$, akkor bármely egész m esetén

$$\mathbf{A}^m\mathbf{v} = c_1\lambda_1^m\mathbf{x}_1 + c_2\lambda_2^m\mathbf{x}_2 + \ldots + c_k\lambda_k^m\mathbf{x}_k.$$

Speciális mátrixok sajátértékei

Á Speciális valós mátrixok: Legyen $\mathbf{A}$ valós mátrix,

- ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus, akkor minden sajátértéke valós,
- ha $\mathbf{A}$ ferdén szimm., akkor minden s.ért.-e imaginárius,
- ha $\mathbf{A}$ ortogonális, akkor minden s.é. absz. értéke 1,
- $\mathbf{A}$ pontosan akkor nilpotens, ha minden sajátértéke 0, azaz karakterisztikus polinomja λ^n.

B Legyen $(\lambda, \mathbf{x})$ egy $\mathbf{A}$-hoz tartozó sajátpár. $\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\mathsf{H}}\lambda\mathbf{x} = \lambda|\mathbf{x}|^2$. Vegyük mindkét oldal adjungáltját $\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{x} = \bar{\lambda}|\mathbf{x}|^2$. L! $\lambda = a + ib$.

- Ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus, azaz $\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}$, akkor $\lambda = \bar{\lambda}$, azaz $a + ib = a - ib$.
- Ha $\mathbf{A}$ ferdén szimmetrikus, azaz $\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = -\mathbf{A}$, akkor $a + ib = -a + ib$.
- $\mathbf{A}$ ortogonális: bármely $\mathbf{x}$-re $|\mathbf{A}\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$. Ha $\mathbf{x}$ sajátvektor, akkor $|\mathbf{x}| = |\mathbf{A}\mathbf{x}| = |\lambda\mathbf{x}| = |\lambda||\mathbf{x}|$
- Ha $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$, akkor λ^k sajátértéke $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$-nak, így $\mathbf{A}$-nak is minden sajátértéke 0. Megfordítás: a Cayley–Hamilton-tételből!

Speciális mátrixok sajátértékei 2.

T Speciális komplex mátrixok: Ha az n-edrendű komplex $\mathbf{A}$ mátrix

- önadjungált, akkor minden sajátértéke valós,
- ferdén önadjungált, akkor minden sajátértéke imaginárius,
- unitér, akkor minden sajátértékének 1 az abszolút értéke.

Hasonlóság

D Azt mondjuk, hogy a λ szám az L lineáris transzformáció **sajátértéke**, ha létezik olyan nemnulla $\mathbf{x}$ vektor, melyre $L\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. $\mathbf{x}$ az L lineáris transzformáció λ sajátértékhez tartozó **sajátvektora**.

T Ha $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, akkor $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ karakterisztikus polinomja, sajátértékei, azok algebrai és geometriai multiplicitásai megegyeznek.

B $\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} &= \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C} - \lambda\mathbf{C}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{C}) \\ &= \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{B}\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}\mathbf{C}) \\ &= \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{C},\end{aligned}$$

Hasonló mátrixoknak pedig determinánsuk és nullterük dimenziója is azonos.

K Lineáris transzformáció karakterisztikus polinomja definiálható.

Diagonalizálhatóság

D A diagonalizálható, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz: $\Lambda = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$

T A diagonalizálható $\iff$ A-nak van n lineárisan független sajátvektora.

B $\Lambda = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} \iff \mathbf{C}\Lambda = \mathbf{A}\mathbf{C}$

$$[\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2\ \dots\ \mathbf{x}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \mathbf{A}[\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2\ \dots\ \mathbf{x}_n]$$

$\lambda_i \mathbf{x}_i = \mathbf{A}\mathbf{x}_i$

D Sajátfelbontás: $\mathbf{A} = \mathbf{C}\Lambda\mathbf{C}^{-1}$

Bal sajátvektorok és a sajátfelbontás diadikus alakja

D Bal sajátvektor: $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \lambda\mathbf{y}^\mathsf{T}$ ($\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}$)

m $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det((\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^\mathsf{T}) = \det(\mathbf{A}^\mathsf{T} - \lambda\mathbf{I}) \rightsquigarrow$ a bal és jobb sajátértékek azonosak

m $\Lambda\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}$: $\mathbf{C}^{-1}$ sorvektorai $\mathbf{A}$ bal sajátvektorai

D Sajátfelbontás diadikus alakja:

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\Lambda\mathbf{C}^{-1} = [\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2\ \dots\ \mathbf{x}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^\mathsf{T} \\ \mathbf{y}_2^\mathsf{T} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n^\mathsf{T} \end{bmatrix}$$
$$= \lambda_1\mathbf{x}_1\mathbf{y}_1^\mathsf{T} + \lambda_2\mathbf{x}_2\mathbf{y}_2^\mathsf{T} + \dots + \lambda_n\mathbf{x}_n\mathbf{y}_n^\mathsf{T}$$

Diagonalizálható mátrix polinomja, Cayley–Hamilton-tétel

T Legyen $\mathbf{A} = \mathbf{C}\Lambda\mathbf{C}^{-1}$, ahol $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, és $p(x)$ egy tetszőleges polinom. Ekkor

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{C}\begin{bmatrix} p(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p(\lambda_n) \end{bmatrix}\mathbf{C}^{-1}.$$

B $\mathbf{A}$ mátrix diagonalizálható $\rightsquigarrow \mathbf{A} = \mathbf{C}\Lambda\mathbf{C}^{-1} \rightsquigarrow$
$\mathbf{A}^2 = \mathbf{C}\Lambda\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}\Lambda\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}\Lambda^2\mathbf{C}^{-1}$...tetszőleges nemnegatív k egészre
$\mathbf{A}^k = \mathbf{C}\Lambda^k\mathbf{C}^{-1} \rightsquigarrow$ bármely $p(x)$ polinomra $p(\mathbf{A}) = \mathbf{C}p(\Lambda)\mathbf{C}^{-1}$.

T Cayley–Hamilton-tétel: Ha $\mathbf{A}$ egy tetszőleges négyzetes mátrix, melynek karakterisztikus polinomja $\chi_{\mathbf{A}}$, akkor $\chi_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$.

m Ha $\mathbf{A}$ diagonalizálható, akkor trivi, ui. ha $\chi_{\mathbf{A}}$ az $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomja, akkor $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$.

Különböző sajátértékek sajátalterei

T Ha λ_1, λ_2,... λ_k különböző sajátértékek, akkor a hozzájuk tartozó $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$,... $\mathbf{x}_k$ sajátvektorok lineárisan függetlenek.

B TFH összefüggők, és $\mathbf{x}_i$ a legkisebb indexű, mely csak a kisebb indexűektől függ: $\mathbf{x}_i = c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\mathbf{x}_{i-1}$,
de az i-nél kisebb indexűek lineárisan függetlenek.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x}_i &= \mathbf{A}(c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\mathbf{x}_{i-1}) = c_1\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\mathbf{A}\mathbf{x}_{i-1}, \\ \lambda_i\mathbf{x}_i &= c_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\lambda_{i-1}\mathbf{x}_{i-1}. \end{aligned}$$

Másrészt: $\lambda_i\mathbf{x}_i = c_1\lambda_i\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\lambda_i\mathbf{x}_{i-1}$.
Kivonva: $\mathbf{0} = c_1(\lambda_i - \lambda_1)\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}(\lambda_i - \lambda_{i-1})\mathbf{x}_{i-1}$,
Mivel az $\mathbf{x}_1$,..., $\mathbf{x}_{i-1}$ vektorok lineárisan függetlenek,
$c_1 = \cdots = c_{i-1} = 0$, $\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$, ellentmondás.

K Ha az n-edrendű $\mathbf{A}$ mátrixnak n darab különböző sajátértéke van, akkor diagonalizálható.

Sajátértékek multiplicitása és a diagonalizálhatóság

K A különböző sajátalterekhez tartozó bázisok uniója lineárisan független vektorokból áll.

T Diagonalizálhatóság és a geometriai multiplicitás Egy n-edrendű valós vagy komplex négyzetes mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha a sajátértékeihez tartozó geometriai multiplicitások összege n.

B ✓

m Egy $\mathbb{F}$ test fölötti n-edrendű mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha az $\mathbb{F}^n$ tér előáll sajátaltereinek direkt összegeként.

P geometriai példák

- vetítés egyenesre, síkra, altérre, hipersíkra,
- tükrözés egyenesre, síkra, hipersíkra,
- forgatás egy egynes körül a térben (nem diagonalizálható).

m Blokkosításból:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{I} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \lambda_2 \mathbf{I} & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \lambda_k \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 & \dots & \mathbf{X}_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1^\mathsf{T} \\ \mathbf{Y}_2^\mathsf{T} \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_k^\mathsf{T} \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{A} = \mathbf{C}\Lambda\mathbf{C}^{-1}$ felbontás:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \mathbf{C}\Lambda\mathbf{C}^{-1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 & \dots & \mathbf{X}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{I} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \lambda_2 \mathbf{I} & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \lambda_k \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1^\mathsf{T} \\ \mathbf{Y}_2^\mathsf{T} \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_k^\mathsf{T} \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 \mathbf{X}_1 \mathbf{Y}_1^\mathsf{T} + \lambda_2 \mathbf{X}_2 \mathbf{Y}_2^\mathsf{T} + \dots + \lambda_k \mathbf{X}_k \mathbf{Y}_k^\mathsf{T} \\ &= \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{P}_k, \end{aligned}$$

ahol $\mathbf{P}_i = \mathbf{X}_i \mathbf{Y}_i^\mathsf{T}$ a λ_i sajátértékhez tartozó mátrix, melyre:

Diagonalizálható mátrixok spektrálfelbontása

T **Diagonalizálható mátrixok spektrálfelbontása:** A $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$ spektrumú $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha felírható

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 + \cdots + \lambda_k \mathbf{P}_k$$

alakban, ahol

- $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \cdots + \mathbf{P}_k = \mathbf{I}$,
- $\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j = \mathbf{O}$, ha $i \neq j$,
- $\mathbf{P}_i$ az $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$ sajátaltérre való $\mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$ altér menti vetítés.

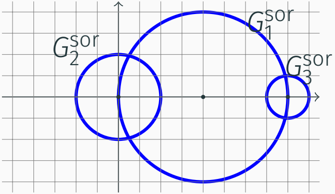
B $\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{I}$ $(\mathbf{P}_i = \mathbf{X}_i \mathbf{Y}_i^T) \rightsquigarrow \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \cdots + \mathbf{P}_k = \mathbf{I}$.
$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{I} \rightsquigarrow \mathbf{Y}_i^T \mathbf{X}_i = \mathbf{I}$, $\mathbf{Y}_i^T \mathbf{X}_j = \mathbf{O}$ $(i \neq j) \rightsquigarrow \mathbf{P}_i \mathbf{P}_j = \mathbf{X}_i \mathbf{Y}_i^T \mathbf{X}_j \mathbf{Y}_j^T = \mathbf{O}$.
$\mathbf{P}_i^2 = \mathbf{X}_i (\mathbf{Y}_i^T \mathbf{X}_i) \mathbf{Y}_i^T = \mathbf{X}_i \mathbf{Y}_i^T = \mathbf{P}_i$, azaz $\mathbf{P}_i$ vetítés.

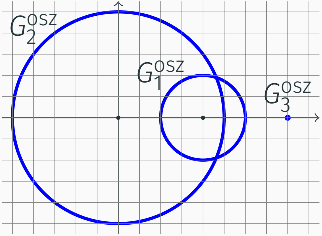
A sajátérték kiszámítása

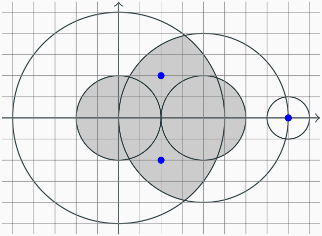
D **Gersgorin-körök:** Az $n \times n$-es valós vagy komplex $\mathbf{A}$ mátrix Gersgorin-körein az a_{ii} középű, és r_i^{sor} sugarú G_i^{sor}, illetve r_i^{osz} sugarú G_i^{osz} köröket értjük ($i = 1, 2, \ldots, n$), ahol

$$r_i^{\text{sor}} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \qquad r_i^{\text{osz}} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ji}|. \tag{1}$$

P Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ mátrix Gersgorin körei:







T A valós vagy komplex $n \times n$-es mátrix.

- $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq \bigcup_i G_i^{\text{sor}}$, $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq \bigcup_i G_i^{\text{osz}}$, $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq (\bigcup_i G_i^{\text{sor}} \cap \bigcup_i G_i^{\text{osz}})$,
- Ha a G_i^{sor} körök egy k-elemű részhalmaza diszjunkt a maradék $n-k$ kör mindegyikétől, akkor uniójuk multiplicitással számolva pontosan k sajátértéket tartalmaz.

B $(\lambda, \mathbf{x})$ sajátpár, $\max_i x_i = 1$, tehát $|x_j| \le 1$ $(j = 1, 2, \dots, n)$.
$\lambda = \lambda x_i = [\lambda \mathbf{x}]_i = [\mathbf{A}\mathbf{x}]_i = \sum_j a_{ij} x_j$, így $\lambda - a_{ii} = \sum_{j \ne i} a_{ij} x_j$, tehát

$$|\lambda - a_{ii}| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} a_{ij} x_j \right| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}||x_j| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}| = r_i^{\text{sor}}.$$

$\mathbf{B}(r) = r\mathbf{A} + (1-r)\,\mathrm{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$, így $\mathbf{B}(0) = \mathrm{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$, $\mathbf{B}(1) = \mathbf{A}$. Változzék r folyamatosan 0-tól 1-ig.

K Bármely soronként (oszloponként) domináns főátlójú valós vagy komplex mátrix invertálható.

B Gersgorin-körei nem tartalmazzák az origót.

Hatványmódszer

D Egy sajátérték szigorúan domináns, ha egyszeres multiplicitású, és abszolút értékben nagyobb az összes többinél. (szigorúan domináns sajátvektor, sajátaltér, sajátpár)

m $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ha λ_1 szig. dom. s.é., azaz $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_m|$, akkor λ_1 valós, egyébként $\overline{\lambda_1}$ is sajátérték lenne.

Legyen $\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m$, $k > 0$ egész:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^k\mathbf{x} &= c_1\mathbf{A}^k\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{A}^k\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\mathbf{A}^k\mathbf{v}_m \\ &= c_1\lambda_1^k\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2^k\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\lambda_m^k\mathbf{v}_m.\end{aligned}$$

Ekkor λ_1^k-val való osztás után $k \to \infty$ esetén

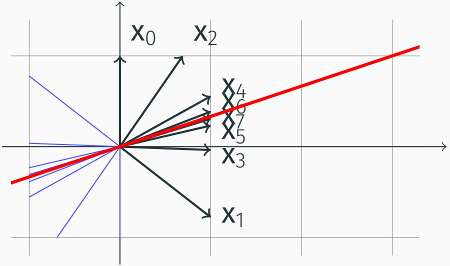
$$\frac{1}{\lambda_1^k}\mathbf{A}^k\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{v}_m \to c_1\mathbf{v}_1,$$

Tehát ha $c_1 \neq 0$, akkor $\mathbf{A}^k\mathbf{x}$ iránya tart a domináns sajátvektor irányához.

T Hatványmódszer: Ha λ_1 az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix szigorúan domináns sajátértéke, akkor létezik olyan $\mathbf{x}_0$ vektor, hogy az $\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0$ vektorok által kifeszített alterek sorozata a domináns sajátaltérhez konvergál, míg $\frac{\mathbf{x}_k^T\mathbf{A}\mathbf{x}_k}{\mathbf{x}_k^T\mathbf{x}_k} \to \lambda$ (ún. Rayleigh hányadosok).

P Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.7 & 0.9 \\ 0.9 & -0.7 \end{bmatrix}$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbf{A}^k\mathbf{x}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.9 \\ -0.7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.9 \\ 1.3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.7 \\ -0.1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4.5 \\ 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9.9 \\ 2.3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 18.9 \\ 7.3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 38.7 \\ 11.9 \end{bmatrix}$



Ortogonális és unitér diagonalizálás

Valós mátrixok ortogonális diagonalizálása

D Az $\mathbf{A}$ mátrix ortogonálisan diagonalizálható, ha találunk egy ortogonális $\mathbf{Q}$ és egy diagonális Λ mátrixot, hogy $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \Lambda$.

Á Szimmetrikus mátrix bármely két különböző sajátaltere merőleges egymásra.

B $(\lambda, \mathbf{x})$ és $(\mu, \mathbf{y})$ két sajátpár, $\lambda \neq \mu$

$$\lambda(\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{y}) = (\lambda\mathbf{x})^\mathsf{T}\mathbf{y} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mu\mathbf{y} = \mu(\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{y}).$$

T Valós spektráltétel: A valós $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható ortogonálisan, ha szimmetrikus.

B $(\Rightarrow)$ $\mathbf{A}^\mathsf{T} = (\mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^\mathsf{T})^\mathsf{T} = (\mathbf{Q}^\mathsf{T})^\mathsf{T}\Lambda^\mathsf{T}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \mathbf{A}$.

$(\Leftarrow)$ teljes indukció, $n = 1$ OK.

$\mathbf{A}$ szimmetrikus, így minden sajátértéke valós. $(\lambda, \mathbf{u}_1)$ egy sajátpár, $\mathbf{u}_1$-et kiegészítjük ONB-sá: $\mathbf{Q}_0 = [\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \ \dots\ \ \mathbf{u}_n]$.

$$Q_0^\top A Q_0 = \begin{bmatrix} u_1^\top \\ u_2^\top \\ \vdots \\ u_n^\top \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^\top \\ u_2^\top \\ \vdots \\ u_n^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Au_1 & Au_2 & \dots & Au_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_1^\top \\ u_2^\top \\ \vdots \\ u_n^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda u_1 & Au_2 & \dots & Au_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & * \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} = B,$$

$B^\top = (Q_0^\top A Q_0)^\top = Q_0^\top A^\top Q_0 = Q_0^\top A Q_0 = B$, $\rightsquigarrow$ $B = \left[\begin{smallmatrix} \lambda & 0^\top \\ 0 & A_1 \end{smallmatrix}\right]$ és A_1 szimm.

$B \sim A$ $\rightsquigarrow$ sajátértékeik megegyeznek $\rightsquigarrow$ A_1 minden sajátértéke A-nak is sajátértéke $\rightsquigarrow$ (teljes indukció miatt) $A_1 = Q_1 \Lambda_1 Q_1^\top$.

$Q = Q_0 \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0^\top \\ 0 & Q_1 \end{smallmatrix}\right]$ ortogonális

$$Q^\top A Q = \left(Q_0 \begin{bmatrix} 1 & 0^\top \\ 0 & Q_1 \end{bmatrix} \right)^\top A \left(Q_0 \begin{bmatrix} 1 & 0^\top \\ 0 & Q_1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0^\top \\ 0 & Q_1 \end{bmatrix}^\top Q_0^\top A Q_0 \begin{bmatrix} 1 & 0^\top \\ 0 & Q_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0^\top \\ 0 & Q_1 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \lambda & 0^\top \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0^\top \\ 0 & Q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0^\top \\ 0 & Q_1^\top A_1 Q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0^\top \\ 0 & \Lambda_1 \end{bmatrix}.$$

Schur-felbontás

T Valós Schur: Minden valós négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix, melynek összes sajátértéke valós, ortogonálisan hasonló egy $\mathbf{T}$ felső háromszögmátrixhoz: $\exists\mathbf{Q}$ ortogonális: $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^\mathsf{T}$.

T Komplex Schur: Minden komplex négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix unitéren hasonló egy $\mathbf{T}$ felső háromszögmátrixhoz: $\exists\mathbf{U}$ unitér: $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{T}\mathbf{U}^\mathsf{H}$.

B Mint az előbb:

$$\mathbf{Q}_0^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{v}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{B}.$$

Indukció: $\mathbf{A}_1 = \mathbf{Q}_1\mathbf{T}_1\mathbf{Q}_1^\mathsf{T}$

$$\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \left(\mathbf{Q}_0\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}\right)^\mathsf{T}\mathbf{A}\left(\mathbf{Q}_0\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}^\mathsf{T}\mathbf{Q}_0^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q}_0\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1^\mathsf{T} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{v}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1^\mathsf{T}\mathbf{A}_1\mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_1 \end{bmatrix}.$$

P Diagonalizálható-e az alábbi mátrix? Adjuk meg egy Schur-felbontását!

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 13 & -16 \\ 9 & -11 \end{bmatrix}$$

M Karakterisztikus polinom: $(x-1)^2$

- sajátérték: $\lambda_{1,2} = 1$, sajátaltér: $\mathrm{span}((4,3))$.
- ONB: $\{(4/5, 3/5), (-3/5, 4/5)\}$, $\mathsf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$
- Innen $\mathsf{Q}^\mathsf{T}\mathsf{A}\mathsf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & -25 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Hessenberg-mátrixok

D Felső Hessenberg-mátrix: a subdiagonális alatt minden elem nulla.

P
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

T Minden valós négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix, ortogonálisan hasonló egy $\mathbf{H}$ felső Hessenberg-mátrixhoz, azaz van olyan $\mathbf{Q}$ ortogonális mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{H}\mathbf{Q}^\top$.

Mátrixok unitér diagonalizálása

D A unitéren diagonalizálható, ha van olyan $\mathbf{U}$ unitér és Λ diagonális mátrix, melyre $\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{U} = \Lambda$ (illetve $\mathbf{A} = \mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^{\mathsf{H}}$).

D Az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normális, ha $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}$.

T Az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható unitéren, ha normális.

B $(\Rightarrow)$ $\mathsf{A} = \mathsf{U}\Lambda\mathsf{U}^\mathsf{H}$

$$\mathsf{A}^\mathsf{H}\mathsf{A} = (\mathsf{U}\Lambda\mathsf{U}^\mathsf{H})^\mathsf{H}(\mathsf{U}\Lambda\mathsf{U}^\mathsf{H}) = \mathsf{U}\Lambda^\mathsf{H}\mathsf{U}^\mathsf{H}\mathsf{U}\Lambda\mathsf{U}^\mathsf{H} = \mathsf{U}\Lambda^\mathsf{H}\Lambda\mathsf{U}^\mathsf{H}$$
$$= \mathsf{U}\Lambda\Lambda^\mathsf{H}\mathsf{U}^\mathsf{H} = \mathsf{U}\Lambda\mathsf{U}^\mathsf{H}\mathsf{U}\Lambda^\mathsf{H}\mathsf{U}^\mathsf{H} = (\mathsf{U}\Lambda\mathsf{U}^\mathsf{H})(\mathsf{U}\Lambda\mathsf{U}^\mathsf{H})^\mathsf{H} = \mathsf{A}\mathsf{A}^\mathsf{H}.$$

$(\Leftarrow)$ Schur: $\mathsf{A} = \mathsf{U}\mathsf{T}\mathsf{U}^\mathsf{H}$. Ha A normális, T is:

$$\mathsf{T}^\mathsf{H}\mathsf{T} = (\mathsf{U}^\mathsf{H}\mathsf{A}\mathsf{U})^\mathsf{H}(\mathsf{U}^\mathsf{H}\mathsf{A}\mathsf{U}) = \mathsf{U}^\mathsf{H}\mathsf{A}^\mathsf{H}\mathsf{U}\mathsf{U}^\mathsf{H}\mathsf{A}\mathsf{U} = \mathsf{U}^\mathsf{H}\mathsf{A}^\mathsf{H}\mathsf{A}\mathsf{U}$$
$$= \mathsf{U}^\mathsf{H}\mathsf{A}\mathsf{A}^\mathsf{H}\mathsf{U} = \mathsf{U}^\mathsf{H}\mathsf{A}\mathsf{U}\mathsf{U}^\mathsf{H}\mathsf{A}^\mathsf{H}\mathsf{U} = (\mathsf{U}^\mathsf{H}\mathsf{A}\mathsf{U})(\mathsf{U}^\mathsf{H}\mathsf{A}\mathsf{U})^\mathsf{H} = \mathsf{T}\mathsf{T}^\mathsf{H}.$$

$$\mathsf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}\text{: ezért } [\mathsf{T}^\mathsf{H}\mathsf{T}]_{11} = |t_{11}|^2,$$

$[\mathsf{T}\mathsf{T}^\mathsf{H}]_{11} = |t_{11}|^2 + |t_{12}|^2 + \dots + |t_{1n}|^2$, amiből $t_{12} = \dots = t_{1n} = 0$.
Hasonlóan a $[\mathsf{T}^\mathsf{H}\mathsf{T}]_{22}$ és a $[\mathsf{T}\mathsf{T}^\mathsf{H}]_{22}$ elemekből $t_{23} = \dots = t_{2n} = 0$, stb.
Tehát T diagonális.

Kvadratikus formák

Homogén másodfokú polinomok mátrixszorzatos alakja

P Másodfokú polinom mátrixszorzatos alakja: Írjuk fel az $x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 5x_1x_2 - 3x_2x_1 + 5x_1x_3 - x_3x_1$ kifejezést mátrixszorzatos alakban!

M A vegyes tagokat először összevonva, majd két egyenlő együtthatójú részre bontva

$$\begin{aligned}
&x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_2 + 4x_1x_3 \\
&= x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_1 + 2x_1x_3 + 2x_3x_1 \\
&= x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_1 + 2x_2^2 + 0x_2x_3 + 2x_3x_1 + 0x_3x_2 + 2x_3^2 \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Áttérés más bázisra

m L! $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbb{R}^n$ egy bázisa $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n\}$, $\mathbf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}} = [\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2\ \dots\ \mathbf{c}_n]$ az áttérés mátrixa és $\mathbf{x}_\mathcal{C}$ az $\mathbf{x}$ vektor $\mathcal{C}$-beli koordinátás alakja. Ekkor $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x}_\mathcal{C}$, így

$$\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{C}\mathbf{x}_\mathcal{C})^\mathsf{T}\mathbf{A}(\mathbf{C}\mathbf{x}_\mathcal{C}) = \mathbf{x}_\mathcal{C}^\mathsf{T}(\mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{C})\mathbf{x}_\mathcal{C}.$$

D Azt mondjuk, hogy $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ kongruensek, jelölése $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$, ha van olyan *invertálható* $\mathbf{C}$ mátrix, hogy $\mathbf{B} = \mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{C}$.

Az $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{C}$ trafót kongruenciatranszformációnak nevezzük.

m A lineáris leképezés mátrixa báziscsere esetén hasonló mátrixra változik, a kvadratikus alak mátrixa egy vele kongruensre.

m Komplex kvadratikus alak esetén $\mathbf{B} = \mathbf{C}^\mathsf{H}\mathbf{A}\mathbf{C}$.

K Milyenek lehetnek a $\mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{D}$ diagonális mátrixok?

P Írjuk fel a $q(x,y) = x^2 - 6xy + y^2$ kvadratikus alakot a $\mathcal{C} = \{(2,1),(3,1)\}$ bázisban!

M A q kvadratikus forma mátrixszorzatos alakja

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Az áttérés mátrixa $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, így

$$\mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -8 \\ -8 & -8 \end{bmatrix}$$

Tehát a kvadratikus alak a $\mathcal{C}$ bázisban

$$\begin{bmatrix} \xi & \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & -8 \\ -8 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = -7\xi^2 - 16\xi\eta - 8\eta^2.$$

T Főtengelytétel: $\mathbf{A}$ egy n-edrendű valós szimmetrikus mátrix, $\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q} = \Lambda$ ortogonális diagonalizálása. Az $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ helyettesítés az $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus formát az $\mathbf{y}^T\Lambda\mathbf{y}$ kvadratikus formába transzformálja, mely kifejtve csak négyzetes tagokat tartalmaz, azaz

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^T\Lambda\mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

ahol λ_1, λ_2,..., λ_n az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei. Választható $\mathbf{Q}$ úgy, hogy $\det(\mathbf{Q}) = 1$ legyen.

Diagonalizálás szimultán sor-oszlopműveletekkel

- A szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrixot elemi sorműveletekkel hozzuk felső háromszög alakra úgy, hogy minden sorművelettel azonos oszlopműveletet is végezzünk el utána.
- Á E szimultán sor-oszlopműveletek szimmetrikus mátrixot szimmetrikusba visznek.
- E műveletek felírhatók elemi mátrixokkal való szorzással is. Ha $\mathbf{E}$ elemi mátrix, akkor $\mathbf{EA}$ az $\mathbf{A}$ sorain ugyanazt a műveletet végzi, mint $\mathbf{AE}^\mathsf{T}$ az $\mathbf{A}$ oszlopain (ugyanis $(\mathbf{EA})^\mathsf{T} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{E}^\mathsf{T} = \mathbf{AE}^\mathsf{T}$).
- k ilyen műveletpár után a következőt kapjuk:

$$\mathbf{E}_k \dots \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A}\mathbf{E}_1^\mathsf{T}\mathbf{E}_2^\mathsf{T} \dots \mathbf{E}_k^\mathsf{T} = \mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{D} \cong \mathbf{A}.$$

- Ha tehát $\mathbf{D} = \mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{C}$ felsőháromszög-mátrix, akkor mivel szimmetrikus, ezért diagonális.
- Semmi nem garantálja, hogy e $\mathbf{C}$ mátrix ortogonális, így a diagonális alak nem biztos, hogy a sajátértékeket tartalmazza.

P Küszöböljük ki a vegyes tagokat az $2xy + 2xz + 2yz$ kvadratikus alakban.

M A kvadratikus alak mátrixa és a sor- és oszlopműveletek:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1+S_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{O_1+O_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[S_3-S_1]{S_2-\frac{1}{2}S_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[O_3-O_1]{O_2-\frac{1}{2}O_1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \mathbf{D}$$

$\rightsquigarrow 2\xi^2 - \frac{1}{2}\eta^2 - 2\zeta^2$. (A kanonikus alak $2\xi^2 - \eta^2 - \zeta^2$, ellenőrizzük!)

- $\mathbf{C}^T$-hoz jutunk, ha csak a sorműveleteket végrehajtjuk $\mathbf{I}$-n:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1+S_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[S_3-S_1]{S_2-\frac{1}{2}S_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{C}^T$$

- Ellenőrzés: $\mathbf{C}^T\mathbf{B}\mathbf{C} = \mathbf{D}$

Sylvester-féle tehetetlenségi tétel

D A b szimmetrikus bilineáris függvény valamely **D** diagonális mátrixában jelölje n_+ a pozitív előjelű, n_- a negatív előjelű és n_0 a zérus értékű diagonális elemek számát. A b szimmetrikus bilineáris függvény tehetetlenségén (inerciáján) vagy szignatúráján az (n_+, n_-, n_0) hármast értjük. Hasonlóan definiálható szimmetrikus mátrix tehetlensége.

K Értelmes-e ez a definíció?

T (Sylvester-féle tehetetlenségi tétel) Két valós szimmetrikus mátrix pontosan akkor kongruens, ha azonos a tehetetlenségük.

m Ez tehát azt jelenti, hogy mindegy, hogy b mátrixát melyik bázisban diagonalizáltuk, mindegyik mátrixhoz ugyanaz a (n_+, n_-, n_0) hármas tartozik, ez tehát a szimmetrikus bilineáris függvényt jellemzi!

Kvadratikus formák

Kvadratikus alak jellege/definitsége

Kvadratikus formák és mátrixok definitsége

D Azt mondjuk, hogy az $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus forma

- pozitív definit, ha $f(\mathbf{x}) > 0$,
- pozitív szemidefinit, ha $f(\mathbf{x}) \geq 0$,
- negatív definit, ha $f(\mathbf{x}) < 0$,
- negatív szemidefinit, ha $f(\mathbf{x}) \leq 0$

bármely $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektor esetén, és azt mondjuk, hogy f

- indefinit, ha pozitív és negatív értékeket is fölvesz.

A szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrixot pozitív/negatív definitnek/szemidefinitnek, illetve indefinitnek nevezzük, ha a hozzá tartozó kvadratikus forma az.

m Tetszőleges $\mathbf{A}$ valós mátrix esetén $\mathbf{A}^\top\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit, ugyanis $\mathbf{x}^\top\mathbf{A}^\top\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^\top(\mathbf{A}\mathbf{x}) = |\mathbf{A}\mathbf{x}|^2 \geqslant 0$.

Példák definit és indefinit kvadratikus alakokra

P $f(x, y) = x^2 + 2y^2$, $g(x, y) = x^2 - 2y^2$, $h(x, y) = -x^2 - 2y^2$, $k(x, y, z) = x^2 + 2y^2$

M f pozitív definit, hisz az $(x, y) \neq (0, 0)$ esetén értéke mindig pozitív, g indefinit, h negatív definit, és k pozitív szemidefinit, hisz értéke $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ esetén is lehet 0 (ha $x = y = 0$, de $z \neq 0$)

m Ha $\mathbf{A}$ negatív definit, akkor $-\mathbf{A}$ pozitív definit. Hasonló állítás igaz a szemidefiniségre is.

m Ha $\mathbf{A} = [a]$, akkor $\mathbf{A}$ pontosan akkor pozitív definit, ha $a > 0$.

m $\mathbf{I}$ pozitív definit, ugyanis $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{I}\mathbf{x} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2 > 0$, ha $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Á Tetszőleges $\mathbf{A}$ valós mátrix esetén $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit, és pontosan akkor pozitív definit, ha $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú.

B $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = |\mathbf{A}\mathbf{x}|^2 \geqslant 0$.

\- $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ $(\mathbf{x} \neq \mathbf{0}) \iff \mathbf{A}$ oszlopvektorai lineárisan összefüggők $\rightsquigarrow$ $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ pozitív definit $\iff \mathbf{A}$ teljes oszloprangú

Mátrix sajátértékei és definitsége

T A valós szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrix ($\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus forma) pontosan akkor

- pozitív definit, ha $\mathbf{A}$ minden sajátértéke pozitív;
- pozitív szemidefinit, ha $\mathbf{A}$ minden sajátértéke nemnegatív;
- negatív definit, ha $\mathbf{A}$ minden sajátértéke negatív;
- negatív szemidefinit, ha $\mathbf{A}$ minden sajátértéke nempozitív;
- indefinit, ha $\mathbf{A}$-nak van pozitív és negatív sajátértéke is.

m Hasonló állítás igaz bármely $\mathbf{A}$-val kongruens diagonális mátrix főátlóbeli elemeire.

Főminorok és a definitség

D Válasszuk ki egy négyzetes mátrix néhány sorát, és ugyanannyiadik sorszámú oszlopát, a többi sort és oszlopot hagyjuk el. Az így kapott négyzetes részmátrix determinánsát a mátrix főminorának nevezzük. Ha az első k sort és az első k oszlopot választjuk ki, vezető főminorról beszélünk, pontosabban a k-adrendű vagy k-adik vezető főminorról.

T Definit mátrixok főminorai és vezető főminorai A valós szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrix, illetve az $\mathbf{x}^\top\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus forma pontosan akkor

- pozitív definit, ha $\mathbf{A}$ minden főminora pozitív;
- pozitív szemidefinit, ha $\mathbf{A}$ minden főminora nemnegatív;
- pozitív definit, ha $\mathbf{A}$ minden vezető főminora pozitív;
- negatív definit, ha $\mathbf{A}$ minden páratlan rendű vezető főminora negatív, páros rendű vezető főminora pozitív.

P Határozzuk meg az

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix},\qquad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{bmatrix}$$

mátrixok jellegét (definitségének típusát)!

M Az **A** mátrix sajátértékei 1, 1 és 4 ⇝ pozitív definit.

$$\begin{bmatrix}x&y&z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\xi&\eta&\zeta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{bmatrix}=\xi^2+\eta^2+4\zeta^2$$

- **B** sajátértékei -1, -1 és 2 ⇝ indefinit ($(1,0,0)$-ben negatív, $(0,0,1)$-ben pozitív), a főtengely-transzformáció után: $-\xi^2-\eta^2+2\zeta^2$
- **C** sajátértékei -3, -3 és 0, így a főtengely-transzformáció után kapott alak $-3\xi^2-3\eta^2+0\zeta^2=-3\xi^2-3\eta^2$ ⇝ negatív szemidefinit ($(0,0,1)$ helyen 0, és pozitív értéket nem vesz fel).

Pozitív szemidefinit mátrixok faktorizációja

T L! $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus. A köv. ekvivalensek:

1. $\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit,
2. $\exists$ pozitív szemidefinit $\mathbf{B}$, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{B}^2$.
3. $\exists$ $\mathbf{C}$ mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{C}$.

A $\mathbf{B}$ mátrix egyértelmű, vagyis egy pozitív szemidefinit mátrixnak egyetlen négyzetgyöke van a pozitív szemidefinit mátrixok közt.

B (1. $\Rightarrow$ 2.) $\mathbf{A}$ szimmetrikus $\rightsquigarrow$ $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^\mathsf{T}$ $\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit $\rightsquigarrow$ minden sajátértéke $\geqslant 0$ $\rightsquigarrow$ Λ főátlóbeli elemeiből négyzetgyököt lehet vonni $\rightsquigarrow$ $\mathbf{A} = \mathbf{Q}(\Lambda^{\frac{1}{2}})\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q}\Lambda^{\frac{1}{2}}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \mathbf{B}\mathbf{B}$, ahol $\Lambda^{\frac{1}{2}} = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$.

- (2. $\Rightarrow$ 3.) $\mathbf{C} = \mathbf{B}$ vagy $\mathbf{C} = \Lambda^{\frac{1}{2}}\mathbf{Q}^\mathsf{T}$ megfelel (ui. $\mathbf{A} = \mathbf{Q}(\Lambda^{\frac{1}{2}})^\mathsf{T}\Lambda^{\frac{1}{2}}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{C}$).

- (3. $\Rightarrow$ 1.) korábban láttuk

B $\quad$ B egyértelműsége: indirekt tfh $\exists\,\mathsf{B},\mathsf{C}$: $\mathsf{A} = \mathsf{B}^2 = \mathsf{C}^2$ és $\mathsf{B} \neq \mathsf{C} \rightsquigarrow$ $\mathsf{B} - \mathsf{C} \neq \mathsf{O}$ szimmetrikus $\rightsquigarrow$ van nemzérus λ sajátértéke és $\mathbf{x}$ egy sajátvektor.

$$\begin{aligned} 0 = \mathbf{x}^\mathsf{T}(\mathsf{B}^2 - \mathsf{C}^2)\mathbf{x} &= \mathbf{x}^\mathsf{T}[\mathsf{B}(\mathsf{B} - \mathsf{C}) + (\mathsf{B} - \mathsf{C})\mathsf{C}]\mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathsf{B}(\mathsf{B} - \mathsf{C})\mathbf{x} + \mathbf{x}^\mathsf{T}(\mathsf{B} - \mathsf{C})\mathsf{C}\mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathsf{B}\lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathsf{C}\mathbf{x} \\ &= \lambda(\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathsf{B}\mathbf{x} + \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathsf{C}\mathbf{x}) \end{aligned}$$

B és C is pozitív szemidefinit $\rightsquigarrow$ $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathsf{B}\mathbf{x} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathsf{C}\mathbf{x} = 0 \rightsquigarrow$

$$0 = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathsf{B}\mathbf{x} - \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathsf{C}\mathbf{x} = \mathbf{x}^\mathsf{T}(\mathsf{B} - \mathsf{C})\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x} \neq 0,$$

ellentmondás.

P Van-e olyan $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ mátrix, melyre $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^2 = \mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{C}$?

M Sajátértékek: 25, 0, a sajátvektorok mátrixa $\mathbf{Q} = \frac{1}{5}\left[\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{smallmatrix}\right]$, így a sajátfelbontás:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \Lambda^{1/2}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}\Lambda^{1/2}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{C} = \mathbf{B}$ is jó.

Pozitív definit mátrixok faktorizációja

T L! $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus. A következők ekvivalensek:

1. $\mathbf{A}$ pozitív definit,
2. az $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ LU-felbontásban $\mathbf{U}$ minden főátlóbeli eleme pozitív,
3. van olyan valós $\mathbf{R}$ felsőháromszög-mátrix, melynek minden főátlóbeli eleme pozitív, és $\mathbf{A} = \mathbf{R}^\top\mathbf{R}$.
4. van olyan invertálható valós $\mathbf{C}$ mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{C}^\top\mathbf{C}$,

A 3. pont szerinti $\mathbf{R}$ egyértelmű!

D Az $\mathbf{A} = \mathbf{R}^\top\mathbf{R}$ felbontást az $\mathbf{A}$ mátrix Cholesky-felbontásának nevezzük.

B 1. $\Rightarrow$ 2. $\mathbf{A}$ pozitít definit $\rightsquigarrow$ invertálható $\rightsquigarrow$ LU-felbontása egyértelmű: $\mathbf{A} = \mathbf{LU} \rightsquigarrow \mathbf{e}_i^T \mathbf{A} \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i^T \mathbf{LU} \mathbf{e}_i = u_{ii} > 0$,

- 2. $\Rightarrow$ 3.

$$\mathbf{U} = \mathbf{D}\hat{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} u_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12}/u_{11} & \dots & u_{1n}/u_{11} \\ 0 & 1 & \dots & u_{2n}/u_{22} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}\hat{\mathbf{U}}$, ahol $\mathbf{L}$ alsó, $\hat{\mathbf{U}}$ felső egységháromszög-mátrix
$\mathbf{A}^T = \mathbf{A} \rightsquigarrow \mathbf{A} = \mathbf{L}(\mathbf{D}^{\frac{1}{2}})^T \mathbf{D}^{\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{U}}^T (\mathbf{D}^{\frac{1}{2}})^T \mathbf{D}^{\frac{1}{2}} \mathbf{L}^T$ egyértelmű! $\rightsquigarrow \mathbf{L} = \hat{\mathbf{U}}^T \rightsquigarrow$
$\mathbf{A} = \mathbf{LDL}^T \rightsquigarrow \mathbf{R} = \mathbf{D}^{\frac{1}{2}} \mathbf{L}^T$ jelöléssel $\mathbf{A} = \mathbf{R}^T \mathbf{R}$.

- E felbontás egyértelmű.
- 3. $\Rightarrow$ 4. $\mathbf{R}$ főátlóbeli elemei pozitívak $\rightsquigarrow$ $\mathbf{R}$ invertálható $\rightsquigarrow \mathbf{C} = \mathbf{R}$ ✓
- 4. $\Rightarrow$ 1. $\mathbf{A} = \mathbf{C}^T \mathbf{C} \rightsquigarrow \mathbf{A}$ pozitív szemidefinit.

$\mathbf{C}$ invertálható $\rightsquigarrow \mathbf{A} = \mathbf{C}^T \mathbf{C}$ is $\rightsquigarrow$ $\mathbf{A}$-nak 0 nem sajátértéke $\rightsquigarrow$ $\mathbf{A}$ pozitív definit.

P Adjuk meg az A mátrix Cholesky-felbontását, ahol

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

B A mátrix pozitív definit $(\chi_{\mathsf{A}}(x) = -x^3 + 8x^2 - 12x + 4)$ Az LU-felbontás

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$\mathrm{diag}(1,4,1) = \mathrm{diag}(1,2,1)\,\mathrm{diag}(1,2,1)$ és az $\mathsf{R} = \mathrm{diag}(1,2,1)\mathsf{L}^\mathsf{T} \rightsquigarrow$

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$