BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

Alkalmazott algebra

BMETE90MX57 (FELSŐBB MATEMATIKA INFORMATIKUSOKNAK)

Lineáris leképezések

2018-09-24 EIC

Wettl Ferenc

ALGEBRA TANSZÉK

Ismeretek, képességek, célok

- Lineáris leképezés különböző ekvivalens definíciói.
- Lineáris transzformáció mátrixa különböző bázisokban.
- Hasonlóság és a hasonlóságra invariáns tulajdonságok.
- Vetítés, merőleges vetítés mátrixa.
- Legjobb közelítés tétele.
- Egyenletrendszer optimális megoldása, és annak kiszámítása.
- Lineáris és polinomiális regresszió.
- Pszeudoinverz tulajdonságai, kiszámítása, és az optimális megoldása kiszámítása.

Mátrixleképezés, lineáris leképezés

A mátrixleképezés fogalma

D $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m; \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$

D képtér: $\mathrm{Im}(A) = \mathcal{O}(\mathbf{A})$, magtér: $\mathrm{Ker}(A) = \mathcal{N}(\mathbf{A})$

P $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} \times \mathbf{x}$.

M Az $\mathbf{a} \times \mathbf{x}$ vektori szorzat koordinátás alakban:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y} = \mathbf{a} \times \mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_2x_3 - a_3x_2 \\ a_3x_1 - a_1x_3 \\ a_1x_2 - a_2x_1 \end{bmatrix} \\
= \begin{bmatrix} & -a_3x_2 + a_2x_3 \\ a_3x_1 & \quad\quad -a_1x_3 \\ -a_2x_1 + a_1x_2 & \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Műveletek mátrixleképezések között

Á $\mathsf{A} + \mathsf{B} = \mathsf{C} \iff A + B = C$

Á $c\mathsf{A} = \mathsf{C} \iff cA = C$

Á $\mathsf{XY} = \mathsf{Z} \iff X \circ Y = Z$

Á $\mathsf{B} = \mathsf{A}^{-1} \iff B = A^{-1}$

Mátrixleképezések tulajdonságai

$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ egy tetszőleges mátrixleképezés, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $c, d \in \mathbb{R}$:

- $A(c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) = cA(\mathbf{x}) + dA(\mathbf{y})$, ($A$ megőrzi a lineáris kombinációt)
- $A(c\mathbf{x}) = cA(\mathbf{x})$, (a leképezés homogén)
  $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y})$, (a leképezés additív)
- $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$
- Tetszőleges altér képe altér.
- Tetszőleges affin altér képe affin altér.

Lineáris leképezés

D Legyen $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ két $\mathbb{F}$ test fölötti vektortér. Azt mondjuk, hogy az $A : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ leképezés lineáris, ha homogén és additív,
lineáris transzformáció, ha $\mathcal{V} = \mathcal{W}$.

P deriválás: $D : \mathcal{V} \to \mathcal{W} : f \mapsto D(f) = f'$

$$D(cf) = (cf)' = cf' = cD(f), \text{ és}$$
$$D(f+g) = (f+g)' = f' + g' = D(f) + D(g).$$

P integrálás:

$$\int_0^1 cf = c\int_0^1 f, \text{ és } \int_0^1 (f+g) = \int_0^1 f + \int_0^1 g.$$

P Síkbeli forgatás, tükrözés, vetítés.

Vektortérből vektortérbe képző lineáris leképezések

T Ekvivalens állítások:

- $A : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ lineáris (homogén és additív).
- Tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$, $c, d \in \mathbb{F}$ esetén

$$A(c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) = cA(\mathbf{x}) + dA(\mathbf{y})$$

- Tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ és $c \in \mathbb{F}$ esetén

$$A(c\mathbf{x} + \mathbf{y}) = cA(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y})$$

- $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathcal{V}$, $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{F}$

$$A(c_1\mathbf{x}_1 + \dots + c_k\mathbf{x}_k) = c_1A\mathbf{x}_1 + \dots + c_kA\mathbf{x}_k.$$

Lineáris $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezések

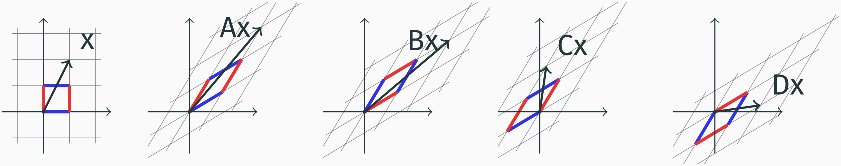
T $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ egy tetszőleges függvény. Az A pontosan akkor lineáris, ha létezik egy olyan $\mathbf{A}_{m\times n}$ mátrix, hogy az A függvény megegyezik az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ leképezéssel. Ekkor az $\mathbf{e}_i$ standard egységvektorokkal

$$\mathbf{A} = [A\mathbf{e}_1 | A\mathbf{e}_2 | \dots | A\mathbf{e}_n],$$

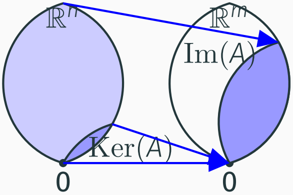
B

$$\begin{aligned}
A\mathbf{x} &= A(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n) \\
&= x_1 A\mathbf{e}_1 + x_2 A\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n A\mathbf{e}_n \\
&= \begin{bmatrix} A\mathbf{e}_1 & A\mathbf{e}_2 & \ldots & A\mathbf{e}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{A}\mathbf{x}
\end{aligned}$$

A mátrixleképezés hatásának szemléltetései



$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$ $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ $\mathsf{C} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$ $\mathsf{D} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$



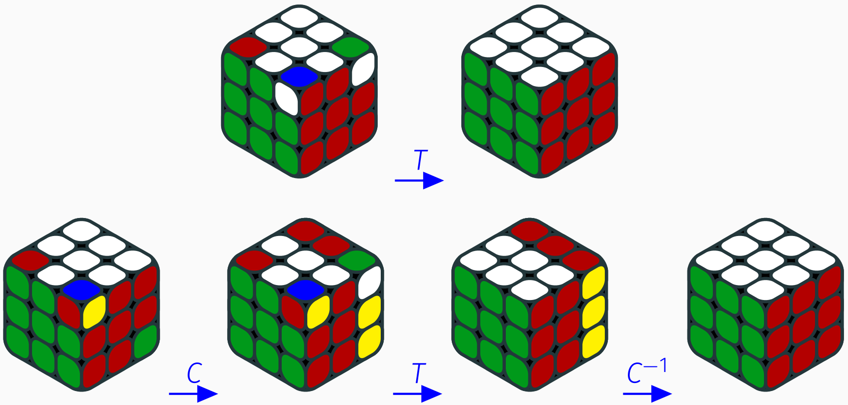
Lineáris transzformáció mátrixa különböző bázisokban

Legyen $L : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ egy lineáris transzformáció, $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ a $\mathcal{V}$ két bázisa. Az L mátrixa e bázisokban $\mathbf{L}_{\mathcal{A}}$ és $\mathbf{L}_{\mathcal{B}}$.

$$\begin{tikzcd}
{[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[r, "\mathbf{L}_{\mathcal{B}}"] & {[L\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}} \\
{[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}} \arrow[u, "\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}"] \arrow[r, "\mathbf{L}_{\mathcal{A}}"'] & {[L\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}} \arrow[u, "\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[r, "\mathbf{L}_{\mathcal{B}}"] & {[L\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[d, "\mathbf{C}_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathbf{C}^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}"] \\
{[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}} \arrow[u, "\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}"] \arrow[r, "\mathbf{L}_{\mathcal{A}}"'] & {[L\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}}
\end{tikzcd}$$

$$\mathbf{L}_{\mathcal{B}}\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}} = \mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}\mathbf{L}_{\mathcal{A}} \qquad \mathbf{L}_{\mathcal{A}} = \mathbf{C}_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{L}_{\mathcal{B}}\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}} = \mathbf{C}^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}\mathbf{L}_{\mathcal{B}}\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$$

Valami hasonló a Rubik-kockán



D Az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix hasonló a $\mathbf{B}$ mátrixhoz, ha létezik olyan invertálható $\mathbf{C}$ mátrix, hogy $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$. Jelölés: $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

Hasonlóság

T **Hasonló mátrixok hatása** Két mátrix pontosan akkor hasonló, ha van két olyan bázis, melyekben e két mátrix ugyanannak a lineáris leképezésnek a mátrixa.

B $\mathsf{B} = \mathsf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}$.

T **Hasonlóságra invariáns tulajdonságok** Ha A és B hasonló mátrixok, azaz $\mathsf{A} \sim \mathsf{B}$, akkor

1. $\mathrm{r}(\mathsf{A}) = \mathrm{r}(\mathsf{B})$,
2. $\dim(\mathcal{N}(\mathsf{A})) = \dim(\mathcal{N}(\mathsf{B}))$,
3. $\det(\mathsf{A}) = \det(\mathsf{B})$,
4. $\mathrm{trace}(\mathsf{A}) = \mathrm{trace}(\mathsf{B})$.

Alkalmazás: differenciálhatóság

Vektor-vektor függvények differenciálhatósága

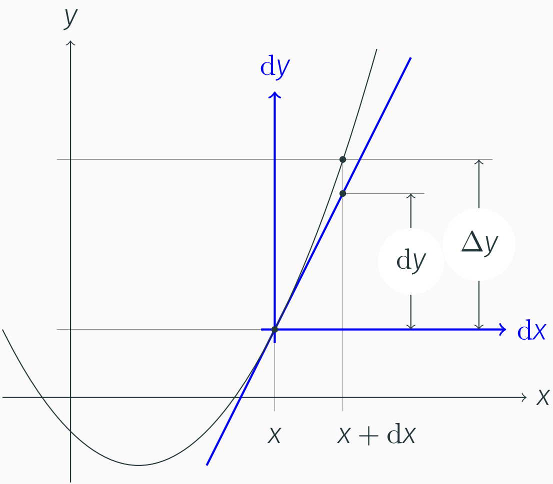
m $D = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \iff \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)-Dh}{h} = 0 \iff \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)-Dh}{|h|} = 0.$

D Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény differenciálható az $\mathbf{x}$ helyen, ha létezik olyan $D_{\mathbf{f},\mathbf{x}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés, melyre

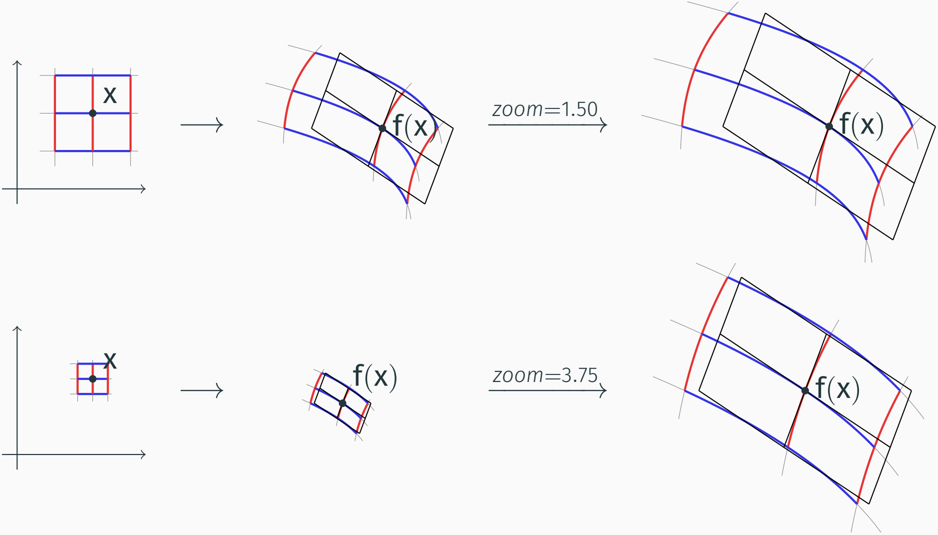
$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - D_{\mathbf{f},\mathbf{x}}\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|} = \mathbf{0}.$$

A $D_{\mathbf{f},\mathbf{x}}$ leképezést az $\mathbf{f}$ függvény $\mathbf{x}$ ponthoz tartozó deriváltleképezésének nevezzük.

Derivált



Derivált

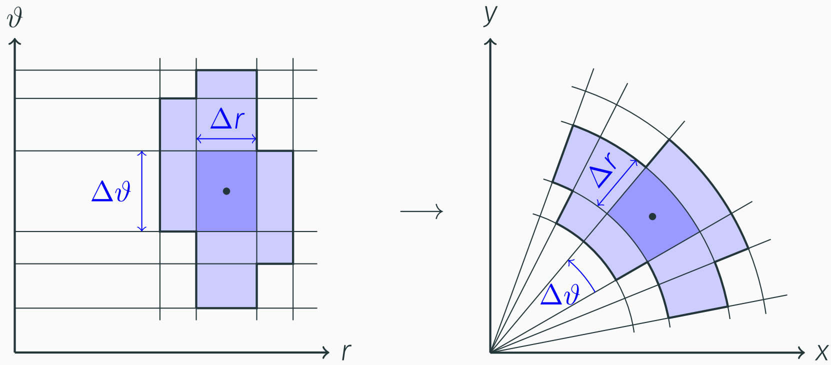


Jacobi-mátrix

T (Jacobi-mátrix) Ha az $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m; (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ függvény differenciálható az $\mathbf{x}$ helyen, akkor a lineáris $D_{\mathbf{f},\mathbf{x}}$ deriváltleképezés mátrixa a következő, ún. Jacobi-mátrix:

$$\mathrm{D}_{\mathbf{f},\mathbf{x}} = \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

Jacobi-determináns és az integrál transzformációja



Függvények kompozíciójának deriváltja

T (Láncszabály) Legyen $\mathbf{f} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ két függvény. Ha $\mathbf{g}$ differenciálható az $\mathbf{x}$ helyen, és $\mathbf{f}$ a $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ helyen, akkor $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ differenciálható az $\mathbf{x}$ helyen, és deriváltleképezése, illetve annak mátrixa:

$$D_{\mathbf{f}\circ\mathbf{g},\mathbf{x}} = D_{\mathbf{f},\mathbf{g}(\mathbf{x})} \circ D_{\mathbf{g},\mathbf{x}}, \quad \text{illetve} \quad \mathbf{D}_{\mathbf{f}\circ\mathbf{g},\mathbf{x}} = \mathbf{D}_{\mathbf{f},\mathbf{g}(\mathbf{x})}\mathbf{D}_{\mathbf{g},\mathbf{x}}.$$

Lineáris trafók 2D-ben és 3D-ben

Forgatás

- Forgatás 2D-ben: $\begin{bmatrix} A\mathbf{i} & A\mathbf{j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$
- Forgatás tengely körül 3D-ben:
$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}.$
- Rodrigues-formula: $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$ egységvektor egyenese körül α szöggel

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{I} + \sin\alpha[\mathbf{e}]_\times + (1 - \cos\alpha)[\mathbf{e}]_\times^2 \\ &= \mathbf{I} + \sin\alpha[\mathbf{e}]_\times + (1 - \cos\alpha)(\mathbf{e}\mathbf{e}^\top - \mathbf{I}) \end{aligned}$$

ahol

$$[\mathbf{e}]_\times = \begin{bmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{e} \times \mathbf{x}$ leképezés mátrixa.

Kvaterniók

Sir William Rowan Hamilton 1843 október 16. Kvaterniók: $a + bi + cj + dk$ alakú számok, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, i, j, k olyan „imaginárius” számok, melyekre $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, $ij = k$, $ji = -k$, $jk = i$,..., összeadás „koordinátánként”, szorzás az előző szabályok szerint: az $\mathbf{u} = u_1 i + u_2 j + u_3 k$, $\mathbf{v} = v_1 i + v_2 j + v_3 k$ jelöléssel $(a + \mathbf{u})(b + \mathbf{v}) = ab - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + a\mathbf{v} + b\mathbf{u} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Here as he walked by on the 16th of October 1843 Sir William Rowan Hamilton in

a flash of genius discovered the fundamental formula for quaternion multiplication

$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ & cut it on a stone of this bridge.

T Forgatás kvaterniókkal: $\mathbf{q} = \cos\frac{\alpha}{2} + (e_1 i + e_2 j + e_3 k)\sin\frac{\alpha}{2}$ a forgatást jellemző kvaternió, a (v_1, v_2, v_3)-hoz tartozó kvaternió $\mathbf{v} = v_1 i + v_2 j + v_3 k$. Az elforgatott: $\mathbf{q}\mathbf{v}\mathbf{q}^{-1}$, ahol $\mathbf{q}^{-1} = \cos\frac{\alpha}{2} - (e_1 i + e_2 j + e_3 k)\sin\frac{\alpha}{2}$

Merőleges vetítés és tükrözés

- Egyenesre való merőleges vetítés mátrixa $\mathsf{P} = \frac{1}{\mathsf{b}^\mathsf{T}\mathsf{b}}\mathsf{b}\mathsf{b}^\mathsf{T}$ ($\mathsf{P} = \mathsf{e}\mathsf{e}^\mathsf{T}$).
- Síkra való merőleges vetítés mátrixa $\mathsf{P} = \mathsf{I} - \mathsf{n}\mathsf{n}^\mathsf{T}$.
- Síkbeli tükrözés mátrixa az *x*-tengellyel $\alpha/2$ szöget bezáró egyenesre: $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$.
- Síkra való tükrözés mátrixa $\mathsf{P} = \mathsf{I} - 2\mathsf{n}\mathsf{n}^\mathsf{T}$.

Eltolás

- 2D: $(x, y) \mapsto (x + a, y + b)$ a $z = 1$ egyenletű síkban:
$$T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + az \\ y + bz \\ z \end{bmatrix}$$
mátrixa
$$\mathbf{T} = T\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
- 3D: $(x, y, z) \mapsto (x + a, y + b, z + c)$ eltolás:
$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + a \\ y + b \\ z + c \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Merőleges vetítés, legjobb közelítés

Alterek direkt összege

D $\mathcal{V} \leqslant \mathcal{U}$ és $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{U}$ két tetszőleges altér. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{W}$ a $\mathcal{V}$ kiegészítő altere, vagy komplementer altér, ha

$$\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}, \quad \mathcal{V} + \mathcal{W} = \mathcal{U},$$

és azt mondjuk, hogy $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ alterek direkt összege, amit $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$ jelöl.

T Ekvivalens állítások:

- $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}$ és $\mathcal{V} + \mathcal{W} = \mathcal{U}$, azaz $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ kiegészítő alterek,
- $\mathcal{U}$ minden vektora egyértelműen áll elő egy $\mathcal{V}$- és egy $\mathcal{W}$-beli vektor összegeként,
- $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}$ és $\dim \mathcal{V} + \dim \mathcal{W} = n$.

P ha $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, akkor $\mathcal{S}(\mathsf{A}) \oplus \mathcal{N}(\mathsf{A}) = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{O}(\mathsf{A}) \oplus \mathcal{N}(\mathsf{A}^\mathsf{T}) = \mathbb{R}^m$.

Merőleges vetítés $\mathbb{R}^n$ egy alterére

T Ha $\mathcal{W}$ az $\mathbb{R}^n$ egy altere, és az A mátrix oszlopvektorai a $\mathcal{W}$ egy bázisát alkotják (A teljes oszloprangú), akkor a $\mathcal{W}$ altérre való merőleges vetítés, azaz a $\mathbf{proj}_{\mathcal{W}}$ leképezés mátrixa $\mathsf{A}(\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A})^{-1}\mathsf{A}^\mathsf{T}$.

B Legyen a $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektor $\mathcal{W}$-re eső merőleges vetülete $\mathbf{w}$.

A oszloptere $\mathcal{W}$, ezért létezik olyan $\mathbf{x}$ vektor, hogy $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{w}$.

$\mathcal{W} = \mathcal{O}(\mathsf{A})$, így $\mathcal{W}^\perp = \mathcal{N}(\mathsf{A}^\mathsf{T})$, tehát $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ benne van A^T nullterében.

Eszerint $\mathsf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{0}$, azaz $\mathsf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{v} - \mathsf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, innen

$$\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathsf{A}^\mathsf{T}\mathbf{v}.$$

Az A mátrix teljes oszloprangú, így $\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}$ invertálható, azaz $\mathbf{x} = (\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A})^{-1}\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathbf{v}$, amiből $\mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{v} = \mathbf{w} = \mathsf{A}\mathbf{x} = \mathsf{A}(\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A})^{-1}\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathbf{v}$.

Melyik mátrix merőleges vetítés mátrixa?

T Egy $\mathbf{P}$ mátrix pontosan akkor merőleges vetítés mátrixa, ha $\mathbf{P} = \mathbf{P}^\mathsf{T} = \mathbf{P}^2$.

$\Rightarrow$ $\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}$

$$\mathbf{P}^2 = \left(\mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)^2 = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{P},$$

$$\mathbf{P}^\mathsf{T} = \left(\mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)^\mathsf{T} = \mathbf{A}\left((\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\right)^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{P}.$$

$\Leftarrow$ Tegyük fel, hogy $\mathbf{P} = \mathbf{P}^\mathsf{T} = \mathbf{P}^2$.
Megmutatjuk, hogy $\mathbf{P}$ az $\mathcal{O}(\mathbf{P})$-re való merőleges vetítés mátrixa.
Ehhez elég megmutatnunk, hogy az $\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x}$ vektor merőleges $\mathcal{O}(\mathbf{P})$-re bármely $\mathbf{x}$ vektor esetén.
A $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ feltétel miatt $\mathbf{P}(\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x}) = \mathbf{P}\mathbf{x} - \mathbf{P}^2\mathbf{x} = \mathbf{0}$, tehát $\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{P})$, de $\mathbf{P} = \mathbf{P}^\mathsf{T}$, így $\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{P}^\mathsf{T})$.
Ez épp azt jelenti, hogy $\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x}$ merőleges $\mathcal{O}(\mathbf{P})$-re, és ezt akartuk belátni.

Altértől való távolság

D $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{W} \leqslant \mathbb{R}^n$ altér. $\mathbf{x}$-nek a $\mathcal{W}$ altértől való távolságán a $\mathcal{W}$ altér $\mathbf{x}$-hez legközelebbi $\mathbf{w}$ vektorának tőle való távolságát értjük.

T Legjobb közelítés tétele: Az $\mathbf{x}$ vektornak egyetlen $\mathcal{W}$-beli legjobb $\hat{\mathbf{x}}$ közelítése van, nevezetesen $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\, \mathbf{x}$.

B $\mathbf{x} - \mathbf{w} = (\mathbf{x} - \mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\, \mathbf{x}) + (\mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\, \mathbf{x} - \mathbf{w})$.

első kifejezés $\mathcal{W}^{\perp}$, a második $\mathcal{W}$ eleme!

$(\mathbf{x} - \mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\, \mathbf{x}) \perp (\mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\, \mathbf{x} - \mathbf{w})$

Pithagorász: $|\mathbf{x} - \mathbf{w}|^2 = |\mathbf{x} - \mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\, \mathbf{x}|^2 + |\,\mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\, \mathbf{x} - \mathbf{w}|^2$.

$\rightsquigarrow |\mathbf{x} - \mathbf{w}|^2 \geq |\mathbf{x} - \mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\, \mathbf{x}|^2$

egyenlőség csak akkor állhat fönn, ha $\mathbf{w} = \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\, \mathbf{x}$

K $\mathbb{R}^n = \mathcal{W} \oplus \mathcal{W}^{\perp}$.

Altértől való távolság

P Bontsuk fel az $\mathsf{x} = (8, 4, 2, 1)$ vektort $\mathcal{W} = \mathrm{span}((1, -1, 1, 0), (0, 1, -1, 0))$-be eső és $\mathcal{W}$-re merőleges vektorok összegére.

M A $\mathcal{W}$-re való merőleges vetítés mátrixa $\mathsf{P} = \mathsf{W}(\mathsf{W}^\mathsf{T}\mathsf{W})^{-1}\mathsf{W}^\mathsf{T}$, ahol W két oszlopa a megadott két bázisvektor:

$$\mathsf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{amiből} \quad \mathsf{Px} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$\mathsf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathsf{x} = \mathsf{Px} = (8, 1, -1, 0)$ és $\mathsf{x} - \mathsf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathsf{x} = (0, 3, 3, 1)$.

Egyenletrendszer optimális megoldása

D Az $\mathsf{Ax} = \mathsf{b}$ optimális megoldásain az $\mathsf{Ax} = \mathbf{proj}_{\mathcal{O}(\mathsf{A})}\, \mathsf{b}$ megoldásait értjük.

T Az $\mathsf{Ax} = \mathsf{b}$ egyenletrendszer optimális megoldásai megegyeznek az

$$\mathsf{A}^{\mathsf{T}}\mathsf{A}\hat{\mathsf{x}} = \mathsf{A}^{\mathsf{T}}\mathsf{b}$$

egyenletrendszer megoldásaival (normálegyenlet-rendszer). Ezek közül egyetlen egy esik az A mátrix sorterébe, a legkisebb abszolút értékű.

T Az (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \dots n)$ párokhoz tartozó, $y = \hat{a} + \hat{b}x$ egyenletű regressziós egyenes paraméterei kielégítik az alábbi egyenletet, mely egyértelműen megoldható, ha van legalább két különböző x_i érték.

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$$

B Megoldandó:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

A hozzá tartozó normálegyenlet-rendszer

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

D Polinomiális regresszióról beszélünk, ha az $y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$ egyenlet a_i együtthatóira keresünk optimális becslést a legkisebb négyzetek módszerével, ismert (x_i, y_i) párok sorozata mellett, ahol $i = 1, 2, \ldots n$.

m Keresendő az n egyenletből álló $k+1$-ismeretlenes

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_k x_1^k &= y_1 \\
a_0 + a_1 x_2 + \ldots + a_k x_2^k &= y_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\
a_0 + a_1 x_n + \ldots + a_k x_n^k &= y_n
\end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldása az a_0, a_1,..., a_k ismeretlenekre.

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^k \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Optimális megoldása a normálegyenletből megkapható.

P Másodfokú regresszió: Az x, y változók között egy $y = a + bx + cx^2$ összefüggés együtthatóit keressük. $n = 4$ mérést végzünk, a mért adatok

k	x_k	y_k
1	-1	3
2	0	0
3	1	1
4	2	1

Keressük meg az a, b, c legkisebb négyzetek elve szerinti legjobb becslését.

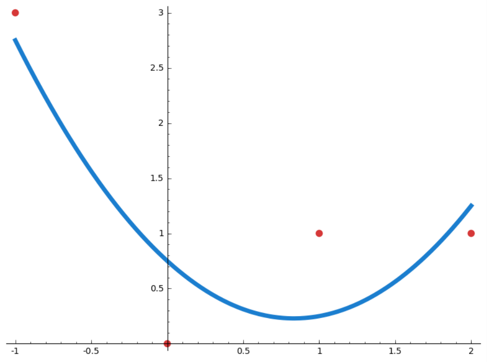
M A megadott adatok közti összefüggés mátrixszorzat alakja: $a + bx + cx^2 = y \rightsquigarrow$ az együtthatómátrix k-adik sorvektora $(1, x_k, x_k^2)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- A normálegyenlet

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Ennek megoldása $(a, b, c) = \frac{1}{4}(3, -5, 3)$, tehát a másodfokú polinom, mely legjobban illeszkedik a megadott (x_k, y_k) pontokra $y = \frac{3}{4} - \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}x^2$.



Vetítés

D $\mathcal{U} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$, így bármely $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ egyértelműen előáll $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ alakban, ahol $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$. A $\mathbf{v}$ vektor az $\mathbf{u}$ vektornak a $\mathcal{V}$ altérre $\mathcal{W}$ mentén való (vele párhuzamosan vett) vetülete.

D E lineáris transzformációt vetítésnek vagy projekciónak nevezzük.

m minden P vetítés az $\operatorname{Im} P$-re $\operatorname{Ker} P$ mentén való vetítés.

Á Mátrixa: $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{V}$ bázisa $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$, $\mathcal{W}$ bázisa $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-r}\}$. Legyen

$$\mathbf{U} = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \dots\ \mathbf{v}_r | \mathbf{w}_1\ \mathbf{w}_2\ \dots\ \mathbf{w}_{n-r}] = [\mathbf{V}|\mathbf{W}].$$

Mivel $P\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i$ $(i = 1, 2, \dots, r)$ és $P\mathbf{w}_j = \mathbf{0}$ $(j = 1, 2, \dots, n-r)$, ezért a P leképezés $\mathbf{P}$ mátrixára

$$\mathbf{PU} = \mathbf{P}[\mathbf{V}|\mathbf{W}] = [\mathbf{PV}|\mathbf{PW}] = [\mathbf{V}|\mathbf{O}].$$

$\mathbf{U}$ invertálható, ezért

$$\mathbf{P} = [\mathbf{V}|\mathbf{O}]\mathbf{U}^{-1} = [\mathbf{V}|\mathbf{O}][\mathbf{V}|\mathbf{W}]^{-1}.$$

Vetítés

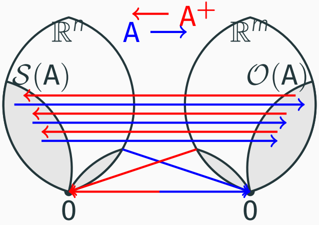
T A projekció tulajdonságai: Legyen $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ egy projekció.

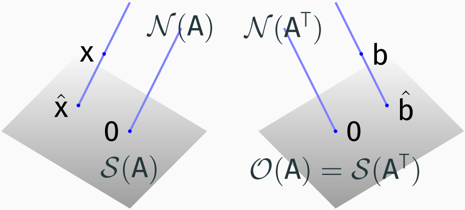
1. $\mathbb{R}^n$-nek van olyan bázisa, melyben a mátrixa $\mathsf{P} = \mathrm{diag}(1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$.
2. $I - P$ is projekció: $\mathrm{Ker}(I - P) = \mathrm{Im}\, P$, $\mathrm{Im}(I - P) = \mathrm{Ker}\, P$,
3. $\mathrm{r}(P) = \mathrm{trace}(\mathsf{P})$.

Pszeudoinverz

A pszeudoinverz fogalma

Á A sortér és az oszloptér közt létezik természetes kölcsönösen egyértelmű megveleltetés ($\mathsf{Ax} = \mathsf{b}$ egyetlen sortérbe eső mo-a).





D Az A mátrix (Moore–Penrose-féle) pszeudoinverze az az A^+ mátrix, melyre tetszőleges b esetén az $\mathsf{Ax} = \mathsf{b}$ egyenletrendszer minimális abszolút értékű optimális megoldása $\mathsf{A}^+\mathsf{b}$.

T **A pszeudoinverz létezése**

Jelölje az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *egyenletrendszer egyetlen sortérbe eső optimális megoldását* $\hat{\mathbf{x}}$. *Az* $A^+ : \mathbf{b} \mapsto \hat{\mathbf{x}}$ *függvény lineáris leképezés, így van mátrixa, melyet* $\mathbf{A}^+$ *jelöl.*

T **Pszeudoinverz hatása a kitüntetett altereken**

Legyen $\mathbf{A}$ *valós vagy komplex mátrix.*

1. *Az* $\mathbf{X}$ *mátrix pontosan akkor pszeudoinverze* $\mathbf{A}$*-nak,*
   (a) *ha* $\mathbf{x} \perp \mathcal{N}(\mathbf{A})$ *esetén* $\mathbf{X}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, *és*
   (b) *ha* $\mathbf{z} \perp \mathcal{O}(\mathbf{A})$ *esetén* $\mathbf{X}\mathbf{z} = \mathbf{0}$.
2. *Ha* $\mathbf{A}^+$ *az* $\mathbf{A}$ *pszeudoinverze, akkor*

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})} \quad \textit{és} \quad \mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A}^\mathsf{T})}.$$

Tehát $\mathbf{A}\mathbf{A}^+$, *illetve* $\mathbf{A}^+\mathbf{A}$ *merőlegesen vetít az* $\mathbf{A}$, *illetve az* $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ *oszlopterére.*

Néhány pszeudoinverz

- Á $\mathsf{A}^+ = \mathsf{A}^{-1}$, ha A invertálható,
- Á $\mathsf{O}^+_{m\times n} = \mathsf{O}_{n\times m}$,
- Á $[a]^+ = [1/a]$, ha $a \neq 0$, és $[0]^+ = [0]$,
- Á $(\mathsf{A}^+)^+ = \mathsf{A}$,
- Á ha $a_{ii} \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, akkor

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & 0 & \ldots & 0 & \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \mathsf{O} \\ 0 & 0 & \ldots & a_{rr} & \\ \hline & & \mathsf{O} & & \mathsf{O} \end{array}\right]^+_{m\times n} = \left[\begin{array}{cccc|c} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \ldots & 0 & \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \ldots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \mathsf{O} \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{a_{rr}} & \\ \hline & & \mathsf{O} & & \mathsf{O} \end{array}\right]_{n\times m}$$

A pszeudoinverz létezése és kiszámítása

T Ha a valós $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú, akkor $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}$, ha teljes sorrangú, akkor $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T})^{-1}$. Ha $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{C}$, ahol $\mathbf{B}$ teljes oszlop-, $\mathbf{C}$ teljes sorrangú (ld. bázisfelbontás), akkor

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{C}^+\mathbf{B}^+ = \mathbf{C}^\mathsf{T}(\mathbf{C}\mathbf{C}^\mathsf{T})^{-1}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T} = \mathbf{C}^\mathsf{T}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{C}^\mathsf{T})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T}.$$

B Ha $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú, akkor $\mathbb{R}^n = \mathcal{S}(\mathbf{A})$, és $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ invertálható:

$$(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

Meg kell még mutatnunk, hogy ha $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$, vagyis ha $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{z} = \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{A}^+\mathbf{z} = \mathbf{0}$: $(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{z} = (\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
Ha $\mathbf{A}$ teljes sorrangú, akkor $\mathcal{O}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^m$: $\forall\mathbf{y}$-ra $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ konzisztens. Jelölje $\hat{\mathbf{x}}$ az egyetlen sortérbe eső megoldást, így minden más $\mathbf{x}$ megoldásra $\mathbf{proj}_{\mathcal{S}(\mathbf{A})}\,\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$. $\mathbf{A}^+$-ra fenn kell álljon $\mathbf{A}^+\mathbf{y} = \hat{\mathbf{x}}$:

$$\mathbf{proj}_{\mathcal{S}(\mathbf{A})}\,\mathbf{x} = \mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \left(\mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T})^{-1}\right)(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{A}^+\mathbf{y}.$$

Példák

- Számítsuk ki a következő mátrixok pszeudoinverzét!

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \ \text{és} \ \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{B}$ teljes oszloprangú, így

$$\mathbf{B}^+ = (\mathbf{B}^\top \mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\top = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}.$$

- A $\mathbf{C}$ mátrix teljes sorrangú, így

$$\mathbf{C}^+ = \mathbf{C}^\top (\mathbf{C}\mathbf{C}^\top)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

- M bázisfelbontása BC:

$$M^+ = C^+B^+ = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- vagy

$$\begin{aligned} M^+ &= C^\top (B^\top M C^\top)^{-1} B^\top \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A pszeudoinverz tulajdonságai

T Moore–Penrose-tétel: A valós A mátrixnak X pontosan akkor pszeudoinverze, ha az alábbi négy feltétel mindegyike fennáll:

$$a)\ \mathsf{AXA} = \mathsf{A}, \quad b)\ \mathsf{XAX} = \mathsf{X}, \quad c)\ (\mathsf{AX})^{\mathsf{T}} = \mathsf{AX}, \quad d)\ (\mathsf{XA})^{\mathsf{T}} = \mathsf{XA}.$$

K Tetszőleges $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix esetén

$$\mathsf{A}^+\mathsf{A} = \mathbf{proj}_{\mathcal{S}(\mathsf{A})} \quad \text{és} \quad \mathsf{AA}^+ = \mathbf{proj}_{\mathcal{O}(\mathsf{A})}.$$

Tehát $\mathsf{A}^+\mathsf{A}$ az $\mathbb{R}^n$ teret merőlegesen vetíti A sorterére, míg AA^+ az $\mathbb{R}^m$ teret merőleges vetíti A oszlopterére.

A pszeudoinverz és a min. absz. értékű opt. megoldás

P Keressük a minimális abszolút értékű optimális megoldást!

$$\begin{aligned} y + z &= 3 \\ x + y + 2z &= 2 \\ x + z &= 2 \end{aligned}$$

M Inkonzisztens, ui.: $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

Pszeudoinverzzel $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^+\mathbf{b} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$