BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

Alkalmazott algebra

BMETE90MX57 (FELSŐBB MATEMATIKA INFORMATIKUSOKNAK)

Mátrix és determináns

2018-09-10 EIC

Wettl Ferenc
ALGEBRA TANSZÉK

Ismeretek, képességek, célok

- Mátrixműveletek blokkmátrixokkal
- Invertálhatóság és egyenletrendszerek
- Speciális mátrixok (permutáló, kígyó)
- Determináns mint a sorok és mint az elemek függvénye
- 2×2-es blokkmátrix determinánsa
- Báziscsere, áttérés másik bázisra
- Bázisfelbontás
- LU-, PLU-felbontás

Mátrixműveletek

Mátrixműveletek

Elemenkénti mátrixműveletek

Elemenkénti mátrixműveletek

- D mátrixok összege: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij}] + [b_{ij}] := [a_{ij} + b_{ij}]$
- D zérusmátrix
- D mátrix skalárszorosa: $c\mathbf{A} = c[a_{ij}] := [ca_{ij}]$
- D mátrixok lineáris kombinációja

Mátrixműveletek

Mátrixszorzás

Lineáris helyettesítések kompozíciója

Tekintsük a következő két lineáris helyettesítést:

$$\begin{aligned} a &= x + 2y + z \\ b &= 2x + y + 3z \end{aligned} \quad \text{és} \quad \begin{aligned} x &= v + 2w \\ y &= w \\ z &= v + w \end{aligned} \tag{1}$$

Írjuk át táblázatba fejléccel:

$$\begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline a & 1 & 2 & 1 \\ b & 2 & 1 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} & v & w \\ \hline x & 1 & 2 \\ y & 0 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{array} \tag{2}$$

A két lineáris helyettesítés egymásutánja ekvivalens az

$$\begin{aligned} a &= 2v + 5w \\ b &= 5v + 8w \end{aligned}$$

helyettesítéssel.

Lineáris helyettesítések kompozíciója

	v	w
x	1	2
y	0	1
z	1	1

	x	y	z
a	1	2	1
b	2	1	3

	v	w
a	2	5
b	5	8

Mátrixszorzás

$$\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{tj} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{it} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{ij} \end{bmatrix}$$

A $m \times s$ **B** $t \times n$

feltéve, hogy $s = t$

$\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ típusa $m \times n$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{t} a_{ik} b_{kj} = \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{b}_{*j}$$

Mátrixműveletek

Blokkmátrixok

Blokkmátrixok

- Blokkmátrixok skalárral való szorzása és két azonos módon particionált blokkmátrix összeadása blokkonként is elvégezhető, azaz

$$c[\mathbf{A}_{ij}] := [c\mathbf{A}_{ij}], \qquad [\mathbf{A}_{ij}] + [\mathbf{B}_{ij}] := [\mathbf{A}_{ij} + \mathbf{B}_{ij}].$$

- Ha $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{ik}]_{m\times t}$, $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_{kj}]_{t\times n}$ két blokkmátrix, és minden k-ra az $\mathbf{A}_{ik}$ blokk oszlopainak száma megegyezik $\mathbf{B}_{kj}$ sorainak számával, akkor a $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ szorzat kiszámítható a szorzási szabály blokkokra való alkalmazásával

$$\mathbf{C}_{ij} = \sum_{k=1}^{t} \mathbf{A}_{ik}\mathbf{B}_{kj}.$$

- Műveletek blokkmátrixokkal:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} 1 & 4 \\ \hline 1 & 1 \\ 6 & 0 \end{array}\right].$$

Blokkmátrixok

$$
\left[\begin{array}{c|c}
\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1\end{bmatrix} \\ \hline
\begin{bmatrix}2 & 1 \\ 0 & 3\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 \\ 1\end{bmatrix}
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c|c}
\begin{bmatrix}1 \\ 1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 \\ 2\end{bmatrix} \\ \hline
\begin{bmatrix}0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}
\end{array}\right]
+
\left[\begin{array}{c|c}
\begin{bmatrix}1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}4\end{bmatrix} \\ \hline
\begin{bmatrix}1 \\ 6\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}
\end{array}\right]
$$

$$
= \left[\begin{array}{c|c}
\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 \\ 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 \\ 2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\end{bmatrix} \\ \hline
\begin{bmatrix}2 & 1 \\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 \\ 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 \\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}2 & 1 \\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 \\ 2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 \\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}
\end{array}\right]
+
\left[\begin{array}{c|c}
\begin{bmatrix}1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}4\end{bmatrix} \\ \hline
\begin{bmatrix}1 \\ 6\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}
\end{array}\right]
$$

$$
= \left[\begin{array}{c|c}
\begin{bmatrix}1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}2\end{bmatrix} \\ \hline
\begin{bmatrix}3 \\ 3\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}5 \\ 7\end{bmatrix}
\end{array}\right]
+
\left[\begin{array}{c|c}
\begin{bmatrix}1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}4\end{bmatrix} \\ \hline
\begin{bmatrix}1 \\ 6\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c|c}
\begin{bmatrix}2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}6\end{bmatrix} \\ \hline
\begin{bmatrix}4 \\ 9\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}6 \\ 7\end{bmatrix}
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c|c}
2 & 6 \\ \hline
4 & 6 \\
9 & 7
\end{array}\right]
$$

Mátrixműveletek

Mátrixszorzás alkalmazásai

Skaláris és diadikus szorzat, lineáris egyenletrendszer

Á Skaláris szorzat:

$$\mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n,$$

Á Diadikus szorzat:

$$\mathbf{u}\mathbf{v}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & \ldots & u_1 v_n \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & \ldots & u_2 v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_m v_1 & u_m v_2 & \ldots & u_m v_n \end{bmatrix}.$$

- A diadikus szorzattal kapott mátrix neve diád. Ezek megegyeznek a legföljebb 1-rangú mátrixokkal.

Á Lineáris egyenletrendszer mátrixszorzatos alakja: $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, szimultán egyenletrendszerek: $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$.

Á Lineáris helyettesítés mátrixszorzatos alakja: $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}$

Mátrixszorzés és lineáris kommbináció

T Mátrixszorzás és lineáris kombináció: $\mathbf{A}$ $m \times n$-es mátrix, $\mathbf{x}$ n-dimenziós, $\mathbf{y}$ m-dimenziós vektor. Ekkor az $\mathbf{Ax}$ szorzat az $\mathbf{A}$ oszlopvektorainak

$$\mathbf{a}_{*1}x_1 + \mathbf{a}_{*2}x_2 + \cdots + \mathbf{a}_{*n}x_n$$

lineáris kombinációját, míg az $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ szorzat az $\mathbf{A}$ sorvektorainak

$$\mathbf{a}_{1*}y_1 + \mathbf{a}_{2*}y_2 + \cdots + \mathbf{a}_{m*}y_m$$

lineáris kombinációját adja.

D Legyen $\mathcal{B} = \{ \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n \}$ és $\mathcal{C} = \{ \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n \}$ az $\mathbb{F}^n$ két bázisa. A $\mathcal{B}$ bázisról a $\mathcal{C}$-re való áttérés mátrixa:

$$\mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = [\, [\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} \mid [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}} \mid \cdots \mid [\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}} \,]$$

T **Báziscsere**

Koordináták változása báziscserénél:

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = \mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$$

összefüggés.

Mátrixműveletek

Bázisfelbontás

T

Bázisfelbontás

$\mathbf{A}_{m\times n}$ *mátrix*

- *redukált lépcsős alakjának nemzérus soraiból álló* $r \times n$*-es részmátrixát* $\mathbf{R}$ ($r = \mathrm{r}(\mathbf{A})$),
- $\mathbf{R}$ *főoszlopainak megfelelő* $\mathbf{A}$*-beli oszlopok alkotta* $m \times r$*-es részmátrixot* $\mathbf{B}$.

Ekkor az $\mathbf{R}$ *mátrix* j*-edik oszlopa megegyezik az* $\mathbf{A}$ *mátrix* j*-edik oszlopának a* $\mathbf{B}$ *oszlopai alkotta bázisban felírt koordinátás alakjával. Képletben:*

$$\mathbf{A}_{*j} = \mathbf{B}\mathbf{R}_{*j}, \quad \textit{azaz} \quad \mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{R}.$$

Bázisfelbontás

P $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & -11 \end{bmatrix}.$

M

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & -11 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

E mátrix első két sora alkotja az $\mathbf{R}$ mátrixot, az $\mathbf{A}$ mátrix első és harmadik oszlopa a $\mathbf{B}$ mátrixot, így a felbontás

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} = \mathbf{BR}.$$

Mátrixműveletek

Elemi mátrixok

Elemi mátrixok

D Az $\mathbf{I}_n$ egységmátrixon végrehajtott egyetlen elemi sorműveletettel kapott mátrixot elemi mátrixnak nevezzük.

P
$$\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&5&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

T Legyen $\mathbf{E}$ az az elemi mátrix, melyet $\mathbf{I}_m$-ből egy elemi sorműveletettel kapunk. Ha ugyanezt a sorműveletet egy tetszőleges $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixra alkalmazzuk, akkor eredményül az $\mathbf{EA}$ mátrixot kapjuk.

Elemi mátrixok

P

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{41} & a_{42} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 5a_{21} & 5a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + 2a_{31} & a_{12} + 2a_{32} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix},$$

Mátrixműveletek

Vektorokra particionált mátrixok

Sorvektorok · oszlopvektorok

$m \times 1$ $\quad$ $1 \times n$ $\quad$ $m \times n$

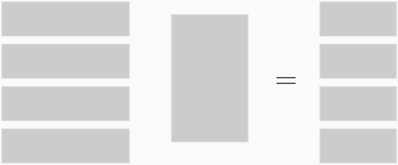
$$\mathsf{AB} = \begin{bmatrix} \mathsf{a}_{1*} \\ \hline \mathsf{a}_{2*} \\ \hline \vdots \\ \hline \mathsf{a}_{m*} \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c|c} \mathsf{b}_{*1} & \dots & \mathsf{b}_{*n} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \mathsf{a}_{1*}\mathsf{b}_{*1} & \mathsf{a}_{1*}\mathsf{b}_{*2} & \dots & \mathsf{a}_{1*}\mathsf{b}_{*n} \\ \mathsf{a}_{2*}\mathsf{b}_{*1} & \mathsf{a}_{2*}\mathsf{b}_{*2} & \dots & \mathsf{a}_{2*}\mathsf{b}_{*n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathsf{a}_{m*}\mathsf{b}_{*1} & \mathsf{a}_{m*}\mathsf{b}_{*2} & \dots & \mathsf{a}_{m*}\mathsf{b}_{*n} \end{bmatrix}.$$

Mátrix · oszlopvektorok

1×1 $\quad$ $1 \times n$ $\quad$ $1 \times n$

$$C = AB = A\left[\begin{array}{c|c|c|c} b_{*1} & b_{*2} & \dots & b_{*n} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} Ab_{*1} & Ab_{*2} & \dots & Ab_{*n} \end{array}\right]$$

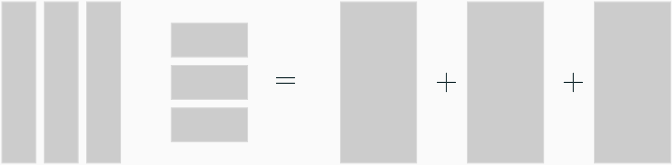
Sorvektorok · mátrix



$m \times 1$ $\quad$ 1×1 $\quad$ $m \times 1$

$$C = AB = \left[\begin{array}{c} a_{1*} \\ \hline a_{2*} \\ \hline \vdots \\ \hline a_{m*} \end{array}\right] B = \left[\begin{array}{c} a_{1*}B \\ \hline a_{2*}B \\ \hline \vdots \\ \hline a_{m*}B \end{array}\right]$$

Oszlopvektorok · sorvektorok



$1 \times t$ $\qquad$ $t \times 1$

$$\mathbf{AB} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{a}_{*1} & \dots & \mathbf{a}_{*t} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{b}_{1*} \\ \hline \dots \\ \hline \mathbf{b}_{t*} \end{array}\right]. = \mathbf{a}_{*1}\mathbf{b}_{1*} + \mathbf{a}_{*2}\mathbf{b}_{2*} + \dots + \mathbf{a}_{*t}\mathbf{b}_{t*}.$$

E felbontásban az **AB** mátrixot diádok összegére bontottuk!

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Szorzat oszlopai és sorai

T Az AB mátrix minden oszlopa az A oszlopainak lineáris kombinációja, és minden sora a B sorainak lineáris kombinációja.

K $r(\mathsf{AB}) \leqslant \min(r(\mathsf{A}), r(\mathsf{B}))$

Á $r(\mathsf{A}+\mathsf{B}) \leqslant r(\mathsf{A}) + r(\mathsf{B})$

Műveleti tulajdonságok

Műveleti tulajdonságok

Alapműveletek

Szorzás

- ‼ A mátrixszorzás nem kommutatív, azaz $\mathsf{AB} = \mathsf{BA}$ nem áll fenn bármely két összeszorozható mátrixra.
- ‼ Ha $\mathsf{AB} = \mathsf{AC}$, akkor az $\mathsf{A} \neq \mathsf{O}$ feltétel kevés ahhoz, hogy a $\mathsf{B} = \mathsf{C}$ következtetésre jussunk.
- ‼ Az $\mathsf{AB} = \mathsf{O}$ egyenlőségből nem következik, hogy A vagy B a nullmátrix.
- Á $\mathsf{A}(\mathsf{BC}) = (\mathsf{AB})\mathsf{C}$ csoportosíthatóság, asszociativitás
- Á $\mathsf{A}(\mathsf{B} + \mathsf{C}) = \mathsf{AB} + \mathsf{AC}$ disztributivitás
- Á $(\mathsf{A} + \mathsf{B})\mathsf{C} = \mathsf{AC} + \mathsf{BC}$ disztributivitás
- Á $(c\mathsf{A})\mathsf{B} = c(\mathsf{AB}) = \mathsf{A}(c\mathsf{B})$
- Á $\mathsf{A}_{m\times n}\mathsf{O}_{n\times t} = \mathsf{O}_{m\times t}$ szorzás nullmátrixszal
- Á $\mathsf{I}_m\mathsf{A}_{m\times n} = \mathsf{A}_{m\times n}\mathsf{I}_n = \mathsf{A}_{m\times n}$ szorzás egységmátrixszal

Hatványozás

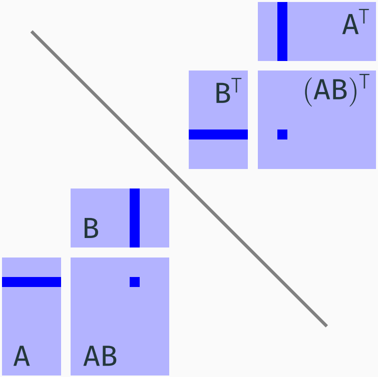
Á $A^k A^m = A^{k+m}$,

Á $(A^k)^m = A^{km}$,

m $A^k A^0 = A^{k+0} = A^k \rightsquigarrow A^0 = I_n$,

Transzponálás

- Á $(A^{\top})^{\top} = A$,
- Á $(A + C)^{\top} = A^{\top} + C^{\top}$,
- Á $(cA)^{\top} = cA^{\top}$,
- Á $(AB)^{\top} = B^{\top}A^{\top}$.



Műveleti tulajdonságok

Inverz

Inverz

D $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$. $\mathbf{A}$ invertálható, ha létezik olyan $\mathbf{B}$ mátrix, melyre

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n.$$

A $\mathbf{B}$ mátrixot $\mathbf{A}$ inverzének nevezzük, és $\mathbf{A}^{-1}$-nel jelöljük. A nem invertálható mátrixot szingulárisnak nevezzük.

D Egy négyzetes $\mathbf{A}$ mátrixot nilpotensnek nevezünk, ha van olyan k pozitív egész, hogy

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{O}.$$

Á $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ inverze nilpotens $\mathbf{A}$ esetén:
$\mathbf{A}^k = \mathbf{O} \rightsquigarrow (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \ldots + \mathbf{A}^{k-1}$.

B
$$\begin{aligned}
(\mathbf{I} - \mathbf{A})&(\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \ldots + \mathbf{A}^{k-1}) \\
&= \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \ldots + \mathbf{A}^{k-1} - \mathbf{A} - \mathbf{A}^2 - \ldots - \mathbf{A}^{k-1} - \mathbf{A}^k \\
&= \mathbf{I} - \mathbf{A}^k \\
&= \mathbf{I}
\end{aligned}$$

Inverz kiszámítása

Á Minden elemi mátrix invertálható, nevezetesen egy sorművelet elemi mátrixának inverze megegyezik a sorművelet inverzének elemi mátrixával.

T A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor invertálható, ha létezik olyan $\mathbf{B}$ mátrix, hogy az $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ és a $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$ feltételek egyike teljesül. Ha ilyen $\mathbf{B}$ mátrix létezik, az egyértelmű.

Á A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix invertálható, ha az $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$ mátrix elemi sorműveletekkel $[\mathbf{I}|\mathbf{B}]$ alakra hozható, ekkor $\mathbf{A}$ inverze $\mathbf{B}$. Ha $\mathbf{A}$ redukált lépcsős alakja nem az $\mathbf{I}$ mátrix, akkor $\mathbf{A}$ nem invertálható.

B Az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ tekinthető szimultán egyenletrendszernek, amelyet az $[\mathbf{A}|\mathbf{I}] \Rightarrow [\mathbf{I}|\mathbf{B}]$ átalakítással oldunk meg!

Inverz kiszámítása

P Számítsuk ki az $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ mátrix inverzét!

M A kiküszöböléssel oszloponként haladva:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Tehát

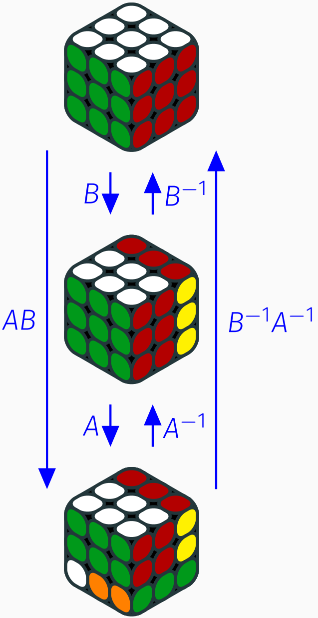
$$\mathsf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Inverz tulajdonságai

T A és B $n \times n$-es invertálható mátrixok, $c \neq 0$ skalár, k pozitív egész.

- A^{-1} invertálható, és inverze $\left(\mathsf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathsf{A}$,
- $c\mathsf{A}$ invertálható, és inverze $\frac{1}{c}\mathsf{A}^{-1}$,
- AB invertálható, és inverze $\mathsf{B}^{-1}\mathsf{A}^{-1}$,
- A^k invertálható, és inverze $\left(\mathsf{A}^k\right)^{-1} = \left(\mathsf{A}^{-1}\right)^k$, definíció szerint ezt értjük A^{-k}-n,
- A^T invertálható, és $\left(\mathsf{A}^\mathsf{T}\right)^{-1} = \left(\mathsf{A}^{-1}\right)^\mathsf{T}$.

Szorzat inverze



T $\mathbf{A}$ $n \times n$-es mátrix. Ekvivalensek:

- $\mathbf{A}$ invertálható;
- az $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ mátrixegyenlet bármely $n \times t$-es $\mathbf{B}$ mátrixra egyértelműen megoldható;
- az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer bármely n dimenziós $\mathbf{b}$ vektorra egyértelműen megoldható;
- a homogén lineáris $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek a triviális $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ az egyetlen megoldása;
- $\mathbf{A}$ redukált lépcsős alakja $\mathbf{I}$;
- $\mathbf{A}$ előáll elemi mátrixok szorzataként.

Invertálhatóság

T Ekvivalens állítások:

- **A** invertálható;
- **A** oszlopvektorai lineárisan függetlenek;
- **A** oszlopvektorai bázist alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben;
- **A** sorvektorai lineárisan függetlenek;
- **A** sorvektorai bázist alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben;
- $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = n$.

T Ekvivalens állítások:

- $\mathbf{A}$ szinguláris (azaz nem invertálható);
- $\mathbf{A}$ oszlopvektorai lineárisan összefüggők;
- az $\mathbf{A}$ oszlopvektorai által kifeszített altér dimenziója kisebb n-nél;
- $\mathbf{A}$ sorvektorai lineárisan összefüggők;
- az $\mathbf{A}$ sorvektorai által kifeszített altér dimenziója kisebb n-nél;
- $\mathbf{A}$ bármely lépcsős alakjának (így redukált lépcsős alakjának is) van zérus sora;
- $\mathrm{r}(\mathbf{A}) < n$.

Báziscsere

T $B = \{ \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n \}$ és $C = \{ \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n \}$ az $\mathbf{R}^n$ két bázisa. Ekkor $\mathbf{X}_{C\leftarrow B}^{-1} = \mathbf{Y}_{B\leftarrow C}$, azaz $\mathbf{X}_{C\leftarrow B}\mathbf{Y}_{B\leftarrow C} = \mathbf{I}_n$.

P $\mathbb{R}^3$ egy $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ bázisában: $\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_B$, $\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}_B$, $\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_B$.

Írjuk fel $\mathcal{B}$ bázisvektorainak standard bázisbeli koordinátás alakját!

M A $\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}$ áttérés mátrixa, azaz $\mathbf{X}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$. Az inverz oszlopvektorai adják a $\mathcal{B}$ vektorainak $\mathcal{E}$-beli alakját.

$$\mathbf{Y}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathbf{X}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Műveleti tulajdonságok

Műveletek speciális mátrixokkal

D A diagonális mátrixok sorainak permutációjával kapott mátrixot kígyónak (más néven transzverzálisnak) nevezzük, speciálisan az egységmátrixból ugyanígy kapott mátrixot permutáló mátrixnak (más néven permutációmátrixnak) hívjuk.

Á Bármely két azonos méretű permutáló mátrix szorzata és egy permutáló mátrix bármely egész kitevős hatványa permutáló mátrix.

Á Permutáló mátrix inverze megegyezik a transzponáltjával, azaz ha $\mathbf{P}$ permutáló mátrix, akkor

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{\mathsf{T}}.$$

P $\mathbf{P}\mathbf{P}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

Speciális mátrixok

- Felső háromszögmátrixok összege, szorzata, és invertálható felső háromszögmátrix inverze felső háromszögmátrix. Analóg tétel igaz az alsó háromszögmátrixokra is. Egy háromszögmátrix pontosan akkor invertálható, ha főátlóbeli elemeinek egyike sem zérus.
- Szimmetrikus mátrixok összege, skalárszorosa, inverze szimmetrikus. Ferdén szimmetrikus mátrixok összege, skalárszorosa, inverze ferdén szimmetrikus.
- Minden négyzetes mátrix előáll egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus mátrix összegeként: $\mathsf{A} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\mathsf{A} + \mathsf{A}^{\mathsf{T}}\right)}_{\text{szimmetrikus}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\mathsf{A} - \mathsf{A}^{\mathsf{T}}\right)}_{\text{ferdén szimm.}}$.
- Az $\mathsf{A}^{\mathsf{T}}\mathsf{A}$ és az $\mathsf{A}\mathsf{A}^{\mathsf{T}}$ mátrixok tetszőleges A mátrix esetén szimmetrikusak.

Gyorsszorzás – Strassen-formulák

Á Legyen **A**, **B** és **C** is 2×2-es. A $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ szorzás elvégezhető a következő formulákkal:

$$
\begin{aligned}
d_1 &= (a_{11} + a_{22})(b_{11} + b_{22}) & \qquad c_{11} &= d_1 + d_4 - d_5 + d_7 \\
d_2 &= (a_{21} + a_{22})b_{11} & c_{21} &= d_2 + d_4 \\
d_3 &= a_{11}(b_{12} - b_{22}) & c_{12} &= d_3 + d_5 \\
d_4 &= a_{22}(-b_{11} + b_{21}) & c_{22} &= d_1 + d_3 - d_2 + d_6 \\
d_5 &= (a_{11} + a_{12})b_{22} \\
d_6 &= (-a_{11} + a_{21})(b_{11} + b_{12}) \\
d_7 &= (a_{12} - a_{22})(b_{21} + b_{22})
\end{aligned}
$$

m A standard mátrixszorzás műveletigénye $2n^3 - n^2$ (n^3 szorzás, $n^3 - n^2$ összeadás), ennek $cn^{\log_2 7} \le cn^{2.807355}$. Lebegőpontos számokra numerikusan instabil.

m Coppersmith és Winograd, 1990: $cn^{2.375477}$, 2010: $cn^{2.374}$, 2011: $cn^{2.3728642}$, 2014: $cn^{2.3728639}$ (egyelőre csak elméleti jelentőségű).

Műveleti tulajdonságok

LU-felbontás

LU-felbontás

D $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ LU-felbontás, ha $\mathbf{L}$ alsó egység háromszögmátrix, $\mathbf{U}$ felső háromszögmátrix.

m nincs mindig: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & c \\ 0 & d \end{bmatrix}$

m Invertálható mátrixra egyértelmű, különben nem feltétlenül:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

m Mátrixinvertálás LU-felbontással: $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, azaz $\mathbf{LUX} = \mathbf{I}$ megoldása:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{I} \iff \mathbf{LY} = \mathbf{I},\ \mathbf{UX} = \mathbf{Y}.$$

Az LU-felbontás memóriahasználata

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ & 1 & 0\\ & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 2 & 4 & 1\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}4.00 & 1.00 & 2.00\\ 2.00 & 4.00 & 1.00\\ 1.00 & 2.00 & 4.00\end{bmatrix}$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \color{red}{1/2} & 1 & 0\\ & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 0 & 7/2 & 0\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}4.00 & 1.00 & 2.00\\ 0.50 & 3.50 & 0.00\\ 1.00 & 2.00 & 4.00\end{bmatrix}$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \color{red}{1/2} & 1 & 0\\ \color{red}{1/4} & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 0 & 7/2 & 0\\ 0 & 7/4 & 7/2\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}4.00 & 1.00 & 2.00\\ 0.50 & 3.50 & 0.00\\ 0.25 & 1.75 & 3.50\end{bmatrix}$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \color{red}{1/2} & 1 & 0\\ \color{red}{1/4} & \color{red}{1/2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 0 & 7/2 & 0\\ 0 & 0 & 7/2\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}4.00 & 1.00 & 2.00\\ 0.50 & 3.50 & 0.00\\ 0.25 & 0.50 & 3.50\end{bmatrix}$$

D $PA = LU$, azaz $A = P^T LU$, P permutáló.

m nem csak négyzet alakúakra értelmezhető

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

m Egyenletrendszer megoldása PLU-val: $Ax = b \iff PAx = Pb \iff LUx = Pb \iff Ly = Pb$ és $Ux = y$

$$
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
\begin{bmatrix} -1 & 6 & 1 & -7 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & -7 & 5 \\ 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 3 & -6 & 8 & 6 & -8 \end{bmatrix}
\to
\begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{array}
\begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 1 & 4 & 4 & -7 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & -7 & 4 \\ 3 & -6 & 8 & 6 & -8 \end{bmatrix}
\to
\begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{array}
\begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 1/4 & 6 & 3 & -9 & 6 \\ -1/4 & 4 & 2 & -5 & 3 \\ 3/4 & 0 & 5 & 0 & -5 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{array}
\begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 1/4 & 6 & 3 & -9 & 6 \\ -1/4 & 2/3 & 0 & 1 & -1 \\ 3/4 & 0 & 5 & 0 & -5 \end{bmatrix}
\to
\begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{array}
\begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 1/4 & 6 & 3 & -9 & 6 \\ 3/4 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ -1/4 & 2/3 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}
\to
\begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{array}
\begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 1/4 & 6 & 3 & -9 & 6 \\ 3/4 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ -1/4 & 2/3 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} -1 & 6 & 1 & -7 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & -7 & 5 \\ 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 3 & -6 & 8 & 6 & -8 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 2/3 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 0 & 6 & 3 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.
$$

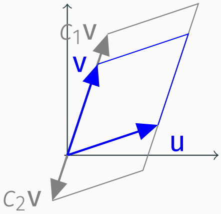
Determináns

Determináns

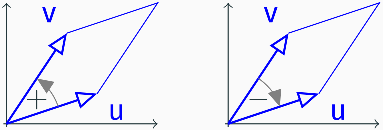
Motiváció

Parallelogramma előjeles területe

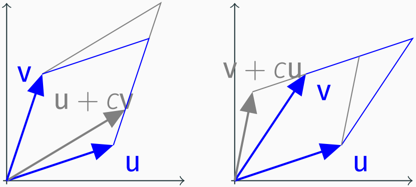
Á $f(c\mathbf{u}, \mathbf{v}) = cf(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, és $f(\mathbf{u}, c\mathbf{v}) = cf(\mathbf{u}, \mathbf{v})$



Á $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -f(\mathbf{v}, \mathbf{u})$



Á $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{u} + c\mathbf{v}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{v} + c\mathbf{u})$



Determináns

A determináns mint sorvektorainak függvénye

Definíció

D Determináns az a négyzetes mátrixokon értelmezett és det-tel jelölt skalár értékű függvény, amely

D1. értéke c-szeresére változik, ha egy sorát c-vel szorozzuk,

D2. értéke -1-szeresére változik, ha két különböző sorát fölcseréljük,

D3. értéke nem változik a hozzáadás elemi sorművelete közben,

D4. az egységmátrixhoz 1-et rendel.

m *D2* elhagyható

m (sor)vektorok függvényeként is definiálható:

$$\det(\mathbf{I}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \det((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) = \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3),$$

Zérus determináns

Á Ha egy mátrixnak van egy zérussora, akkor determinánsa 0.

Á Ha egy mátrixnak van két azonos sora, akkor determinánsa 0.

T Ekvivalens állítások:

1. $\det(\mathbf{A}) = 0$,
2. $\mathbf{A}$ sorvektorai lineárisan összefüggők,
3. $\mathbf{A}$ szinguláris,
4. a homogén lineáris $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása.

P $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

T Ekvivalens állítások:

1. $\det \mathbf{A} \neq 0$,
2. az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer tetszőleges $\mathbf{b}$-re egyértelműen megoldható,
3. az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek csak triviális megoldása van.

- Óvatosan: $\begin{vmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & n \end{vmatrix} = 1, \quad$ és az $\quad \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2^n}$
- A véletlen valós mátrixok determinánsa 1 valószínűséggel nem 0, ha a mátrix elemeit valamely folytonos valószínűségeloszlás szerint választjuk.

A determináns értékének kiszámítása

T Az alsó vagy felső háromszögmátrix, s így a diagonális mátrix determinánsa megegyezik a főátlóbeli elemek szorzatával.

m Elemi sorműveletekkel hozzuk a determinánst olyan alakra, melynek vagy van egy zérussora, vagy háromszög alakú

P Pascal-háromszög:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Elemi mátrixok determinánsa

- Á a hozzáadás sorműveletével kapott elemi mátrix determinánsa 1,
- Á a sorcserével kapotté -1,
- Á egy sor c-vel való szorzásával kapotté c,
- P például:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3.$$

Permutáló mátrix determinánsa

D egy permutáló mátrix két sora inverzióban áll, ha az előbb álló sorbeli 1-es hátrébb van, mint a másik sorbeli

P $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ inverzióinak száma például 4.

T A permutáló mátrix aszerint $+1$ vagy -1, hogy inverzióban álló sorpárjainak száma páros vagy páratlan.

Mátrixműveletek és determináns

Á $A_{n\times n}$ mátrixra és tetszőleges c skalárra $\det(cA) = c^n \det(A)$

T $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

B $\det(EB) = \det(E)\det(B)$

Legyen $A = E_1E_2 \dots E_k$ az elemi mátrixok szorzatára bontás.

$\rightsquigarrow$ $\det(A)\det(B) = \det(E_1)\det(E_2)\dots\det(E_k)\det(B) = \det(AB)$.

Á $\det(A) = \det(A^T)$.

Á Determináns könnyen számolható a PLU-ból.

Determináns multilineáris függvény

T Aditivitás az i-edik sorban: $\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix}$

Á homogenitás az i-edik sorban a definíció szerint (D1)!

$\rightsquigarrow$ a determináns minden sorában „megtartja a lineáris kombinációt”.

m Ha determinánst, mint sorvektorainak n-változós függvényét tekintjük, akkor a det függvény minden változójában additív és homogén (multilineáris).

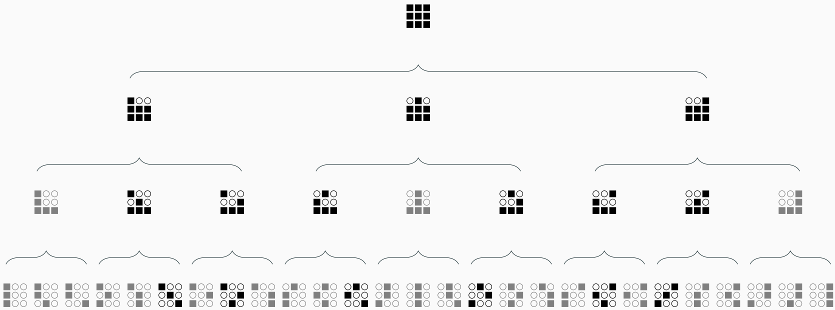
Determináns

A determináns mint elemeinek függvénye

Additivitás használata

Mivel $(a, b, c) = (a, 0, 0) + (0, b, 0) + (0, 0, c)$ ezért

$$\begin{vmatrix} a+0+0 & 0+b+0 & 0+0+c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$



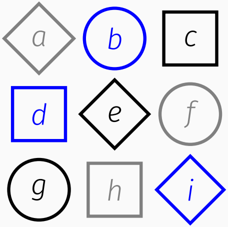
Determináns mint kígyók determinánsainak összege

T Minden n-edrendű determináns fölbomlik az összes belőle kiválasztható kígyó determinánsának összegére. Ha $d_{j_1 j_2 \dots j_n}$ az a_{1j_1}, a_{2j_2},..., a_{nj_n} elemekből álló kígyóhoz tartozó permutáló mátrixnak a determinánsa, akkor

$$\det([a_{ij}]) = \sum d_{j_1 j_2 \dots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n},$$

ahol az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz összes lehetséges $\{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ permutációjára összegzünk.

P Sarrus-szabály $n = 2$, $n = 3$ esetén:



T A determinánsfüggvény létezik, és egyértelmű.

Következmények

Á A determináns kiszámolásához elég csak az összeadás és szorzás művelete, az osztásra, melyet az elemi sorműveletek során használhatunk, nincs szükség. (Gyűrű test helyett).

Á Egész számokból álló determináns értéke egész szám.

Á Mivel a determináns kifejtésében csak az összeadás és a szorzás művelete szerepel, a determináns folytonos, sőt differenciálható függvénye elemeinek.

Kifejtés

D Az n-edrendű $|\mathbf{A}|$ determináns i-edik sorának és j-edik oszlopának elhagyásával kapott $(n-1)$-edrendű determináns $(-1)^{i+j}$-szeresét az $|\mathbf{A}|$ determináns a_{ij} eleméhez tartozó előjeles aldeterminánsának nevezzük.

Á Ha az n-edrendű $|\mathbf{A}|$ determináns a_{ij} elemének sorában vagy oszlopában minden további elem 0, A_{ij} az a_{ij} elemhez tartozó előjeles aldetermináns, akkor $|\mathbf{A}| = a_{ij}A_{ij}$.

T Az n-edrendű $|\mathbf{A}|$ determináns értéke i-edik sora szerint kifejtve

$$|\mathbf{A}| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik},$$

és j-edik oszlopa szerint kifejtve

$$|\mathbf{A}| = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}.$$

Vandermonde-determináns

D $x_1, x_2,\ldots x_n$ számokhoz tartozó Vandermonde-determináns

$$V_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

T $V_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i<j}(x_j - x_i)$.

A A különböző $x_1, \ldots, x_n$ és a tetszőleges $y_1, \ldots, y_n$ számokhoz egyetlen olyan legföljebb $n-1$-edfokú f polinom létezik, melyre $f(x_i) = y_i$.

Cramer-szabály

J $\mathsf{A}_{i,\mathsf{b}} = [\mathsf{a}_{*1} \ \dots \ \mathsf{a}_{*,i-1} \ \mathsf{b} \ \mathsf{a}_{*,i+1} \ \dots \ \mathsf{a}_{*n}]$.

T Az $\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{b}$ egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg egyértelműen, ha $\det \mathsf{A} \neq 0$, és ekkor

$$x_i = \frac{\det \mathsf{A}_{i,\mathsf{b}}}{\det \mathsf{A}}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

B $\mathsf{A}\mathsf{e}_i = \mathsf{a}_{*i}$, így

$$\begin{aligned} \mathsf{A}\mathsf{I}_{i,\mathsf{x}} &= \mathsf{A}[\mathsf{e}_{*1} \ \dots \ \mathsf{e}_{*,i-1} \ \mathsf{x} \ \mathsf{e}_{*,i+1} \ \dots \ \mathsf{e}_{*n}] \\ &= [\mathsf{A}\mathsf{e}_{*1} \ \dots \ \mathsf{A}\mathsf{e}_{*,i-1} \ \mathsf{A}\mathsf{x} \ \mathsf{A}\mathsf{e}_{*,i+1} \ \dots \ \mathsf{A}\mathsf{e}_{*n}] \\ &= [\mathsf{a}_{*1} \ \dots \ \mathsf{a}_{*,i-1} \ \mathsf{b} \ \mathsf{a}_{*,i+1} \ \dots \ \mathsf{a}_{*n}] \\ &= \mathsf{A}_{i,\mathsf{b}} \end{aligned}$$

Inverz mátrix elemei

T $[\mathbf{A}^{-1}]_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det \mathbf{A}}$.

K $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}[A_{ij}]^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \operatorname{adj} \mathbf{A}$.

K $\mathbf{A} \operatorname{adj} \mathbf{A} = \det(\mathbf{A})\mathbf{I}$ (szinguláris mátrixra is jó).

K Az inverz mátrix minden eleme folytonos függvénye a mátrix minden elemének minden olyan helyen, ahol a determináns nem 0, azaz minden olyan helyen, ahol az inverz létezik.

K Egy n-ismeretlenes n egyenletből álló egyenletrendszer megoldásvektorának minden koordinátája folytonos függvénye az egyenletrendszer együtthatóinak és a jobb oldalán álló vektor koordinátáinak, hisz a megoldás az inverzzel való szorzással megkapható.

K Egészelemű mátrix inverze pontosan akkor egészelemű, ha determinánsa 1 vagy -1 $\left(\det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{A}^{-1}) = \det \mathbf{I} = 1\right)$.

Blokkmátrixok determinánsa ▼

T $\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}||\mathbf{D}|.$

T Legyen $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$, ahol $\mathbf{A}$ és $\mathbf{D}$ négyzetes mátrixok. Ekkor

Ha $|\mathbf{A}| \neq 0$, akkor $|\mathbf{M}| = |\mathbf{A}||\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}|$.

Ha $|\mathbf{D}| \neq 0$, akkor $|\mathbf{M}| = |\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}||\mathbf{D}|$.

B Trükk

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$