BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

Alkalmazott algebra

BMETE90MX57 (FELSŐBB MATEMATIKA INFORMATIKUSOKNAK)

Vektorterek, egyenletrendszerek

2018-09-03 12:15-14:00 EIC

Wettl Ferenc
ALGEBRA TANSZÉK

Ismeretek, képességek, célok

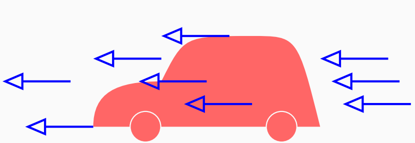
- Vektor – ekvivalenciareláció
- Lineáris kombináció (üres halmazé is), függetlenség, függőség
- Test (∞ és prímhatvány elemű), gyűrű, $\mathbb{F}^n$
- Lépcsős alak/Gauss, redukált lépcsős alak/Gauss–Jordan
- Vektortér, (kifeszített) altér, generátorrendszer, bázis, dim.
- Egyenletrendszer megoldáshalmaza affin altér
- Kitüntetett alterek: $\mathcal{N}(\mathsf{A})$, $\mathcal{O}(\mathsf{A})$, $\mathcal{S}(\mathsf{A}) = \mathcal{O}(\mathsf{A}^\mathsf{T})$, $\mathcal{N}(\mathsf{A}^\mathsf{T})$
- A lineáris algebra alaptétele
- A sortérbe eső egyetlen megoldás meghatározása

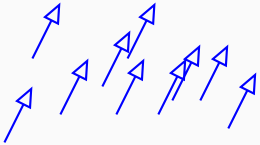
Vektorok

Vektorok

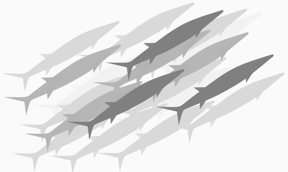
A 2- és 3-dimenziós tér vektorai

Szabad vektor





- Ha az irányított szakasz a hal, a vektor a halraj.



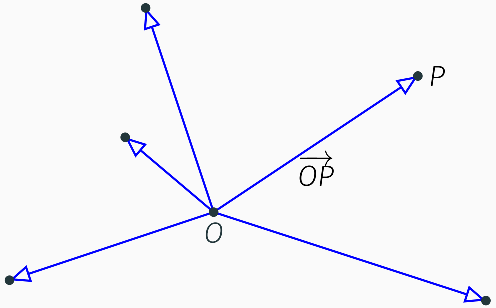
D R ekvivalencia reláció ($\forall\, a, b, c$ reflexív: $a\ R\ a$, szimmetrikus: $a\ R\ b \ \Rightarrow\ b\ R\ a$, tranzitív: $a\ R\ b,\ b\ R\ c \ \Rightarrow\ a\ R\ c$)

Á Minden ekvivalenciareláció megadja az elemek egy diszjunkt részhalmazok uniójára való bontását, azaz osztályozását.

D R: két irányított szakasz ekvivalens, ha egyik a másikba „tolható”. Ekkor a vektorok az ekvivalenciaosztályok.

Origó

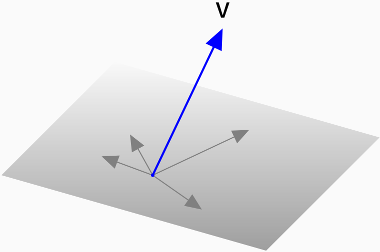
- A közös kezdőpont

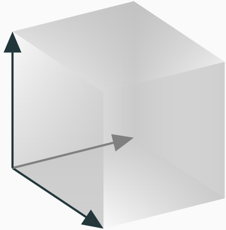


- A pontok és a vektorok közt kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés: egy P pontnak az $\overrightarrow{OP}$ vektor felel meg, az origónak a nullvektor.

Vektorok lineáris függetlensége, lineáris összefüggősége

D $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ lineáris kombinációja $\sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{v}_i$ ($c_i \in \mathbb{R}$).
Az üres vektorhalmaz bármely lin.komb-ja $\mathbf{0}$.





D $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ lineárisan független, ha egyik sem áll elő a többi lin.komb-jaként. (egy vektorra is jó: $\{\mathbf{v}\}$ független, ha $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$)
Lineárisan függő, ha nem független (van olyan, amelyik előáll)

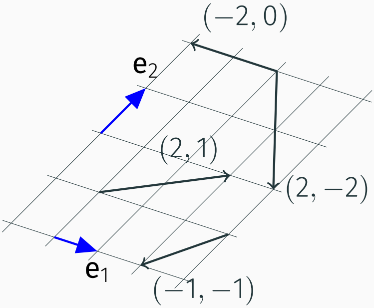
T $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ lin.független $\iff$ $\sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ csak $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$ esetén áll fenn.

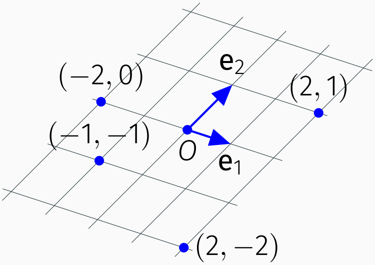
Vektorok

Vektorok koordinátás alakban

Vektorok és pontok koordinátái

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ maximális számú lineárisan független





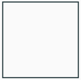
Hogy lehet elképzelni: a négydimenziós kocka

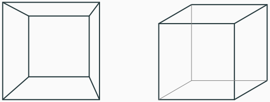
$\mathbb{R}^n$ a rendezett valós szám-n-esek tere

Hogy lehet elképzelni? Az analógiák segíthetnek!

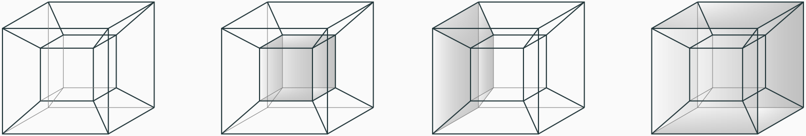
$\mathbb{R}^4$-ben egy kocka:

1D:

2D: 

3D: 

4D:



Algebrai struktúrák

Algebrai struktúrák

Test és gyűrű

Test – számolunk, mint a valós számokkal

D Egy legalább kételemű $\mathbb{F}$ halmazt testnek nevezünk, ha

1. értelmezve van $\mathbb{F}$ elempárjain egy összeadás és egy szorzás nevű bináris művelet,
2. az összeadás kommutatív, asszociatív, létezik nullelem és minden elemnek létezik ellentettje (additív inverze),
3. a szorzás kommutatív, asszociatív, létezik egységelem és a nullelemen kívül minden elemnek létezik multiplikatív inverze (reciproka),
4. a szorzás az összeadásra nézve disztributív.

Á a nullelem és az egységelem szükségképpen különböző.

Á $0a = a0 = 0$.

P $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$.

P Véges testek: $\mathbb{Z}_p$ (prím modulusú maradékosztályok teste, más jelölések: $\mathbb{F}_p$, $\mathrm{GF}(p)$), $\mathrm{GF}(q)$, ahol q prímhatvány.

Gyűrű – számolunk, mint az egészekkel

D Ha a testnél definiált szorzás csak asszociatív, gyűrűről,

D ha kommutatív is, kommutatív gyűrűről,

D ha az asszociativitás mellett van egységeleme is, egységelemes gyűrűről beszélünk.

P Minden test gyűrű.

P $\mathbb{Z}$ egységelemes kommutatív gyűrű, $\mathbb{N}$ nem gyűrű.

P A páros számok kommutatív gyűrűt alkotnak, de ez nem egységelemes.

P A modulo m maradékosztályok $\mathbb{Z}_m$ struktúrája egységelemes kommutatív gyűrű, és pontosan akkor test, ha m prím.

P A valós együtthatós polinomok egységelemes kommutatív gyűrűt alkotnak.

Maradékosztály-test

$\mathbb{Z}_2 = \mathbb{F}_2 = \mathrm{GF}(2)$:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

×	0	1
0	0	0
1	0	1

$\mathbb{Z}_3 = \mathbb{F}_3 = \mathrm{GF}(3)$:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

$\mathbb{Z}_5 = \mathbb{F}_5 = \mathrm{GF}(5)$:

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Maradékosztály-gyűrű

$\mathbb{Z}_6$ gyűrű:

$+$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

$\cdot$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

- Véges testeket és gyűrűket széles körben alkalmaz a kódelmélet és a kriptográfia.

Prímhatványrendű testek

m $\mathrm{GF}(4)$: választunk egy $\mathbb{F}_2$ fölötti másodfokú irreducibilis (felbonthatatlan) polinomot, pl. $x^2 + x + 1$.
Ha egy másod vagy harmadfokú polinom felbontható, akkor van elsőfokú tényezője, így van gyöke, de ennek nincs, mert 0-ban és 1-ben sem 0 az értéke.

- A $\mathrm{GF}(4)$ elemei 0, 1, x, $x+1$ (a legföljebb elsőfokú polinomok), és a számolás köztük modulo $x^2 + x + 1$ történik:

$+$	0	1	x	$x+1$
0	0	1	x	$x+1$
1	1	0	$x+1$	x
x	x	$x+1$	0	1
$x+1$	$x+1$	x	1	0

$\times$	0	1	x	$x+1$
0	0	0	0	0
1	0	1	x	$x+1$
x	0	x	$x+1$	1
$x+1$	0	$x+1$	1	x

m $\mathrm{GF}(2^n)$ konstrukciója hasonlóan megy egy $\mathrm{GF}(2)$ fölötti n-edfokú, irreducibilis polinommal.

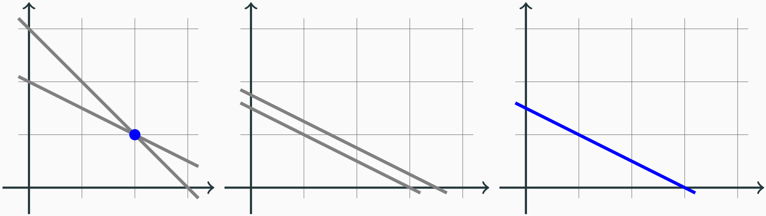
Lineáris egyenletrendszerek

Lineáris egyenletrendszerek

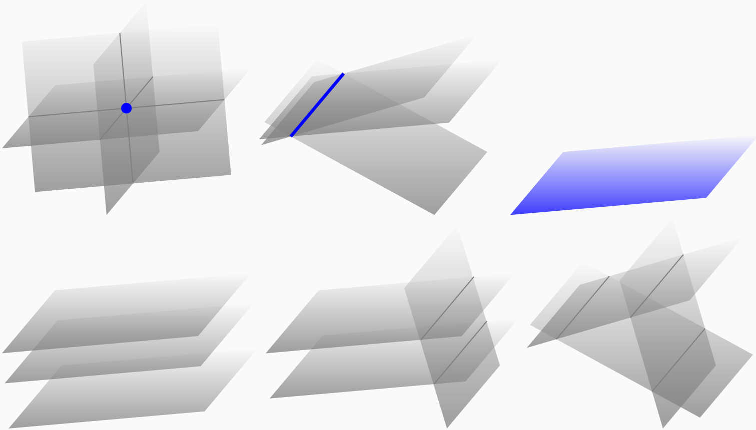
Sor- és oszlopmodell

Sormodell

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned} \quad \text{az} \quad \begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x + 4y &= 7 \end{aligned} \quad \text{és az} \quad \begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x + 4y &= 6 \end{aligned}$$



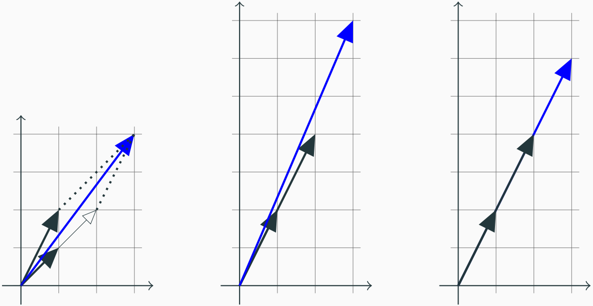
Sormodell 3D-ben



Oszlopmodell

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x + 4y &= 7 \end{aligned} \quad \text{és} \quad \begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x + 4y &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$



Lineáris egyenletrendszerek

Alakzatok egyenletei: egyenes, sík, hipersík

		Explicit vektoregyenlet	Implicit egyenlet(rendszer)
Síkban	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	$Ax + By = C$
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	$A_1x + B_1y = C_1$ $A_2x + B_2y = C_2$
Térben	sík	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$	$Ax + By + Cz = D$
	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	$A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	$A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$ $A_3x + B_3y + C_3z = D_3$
$\mathbb{R}^n$-ben	hipersík	???	$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$
	sík	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$	???
	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	???
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	???

Lineáris egyenletrendszerek

Lineáris egyenletrendszer és megoldásai

Lineáris egyenletrendszer

D Lineáris egyenletrendszer általános alakja

$$\begin{array}{cccccccc} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 & + \ldots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 & + \ldots + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array} \qquad (*)$$

ahol x_1, x_2,...x_n az ismeretlenek, a_{ij} együttható, b_i konstans tag. Ha mindegyik egyenlet konstans tagja 0, a lineáris egyenletrendszer homogén, ha csak egy is különbözik 0-tól, inhomogén.

- Lineáris az x és y változókban:

$$\begin{aligned} ax + \quad y &= 2a \\ x - \frac{1}{a}y &= \quad 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x - \quad y &= 0 \\ -x + 2y &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= 1 \\ 0 &= 2 \end{aligned} \qquad x + y = 1$$

Megoldás

D Lineáris egyenletrendszer megoldása a rendezett $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ szám-n-es

megoldásvektor

D megoldáshalmaz (az összes megoldás halmaza)

D konzisztensnek (megoldható), inkonzisztens (nem megoldható).

m Ha egy egyenletrendszer több egyenletből áll, mint ahány ismeretlene van, túlhatározottnak nevezzük, míg ha kevesebb egyenletből áll, alulhatározottnak.

Ekvivalens lineáris egyenletrendszerek

D Azonos ismeretlenekkel felírt két egyenletrendszert ekvivalensnek nevezünk, ha megoldásaik halmaza azonos.

T Egyenletrendszert ekvivalens egyenletrendszerbe visznek át:

1. két egyenlet felcserélése;
2. egy egyenlet nem nulla számmal való szorzása;
3. egy egyenlet konstansszorosának egy másikhoz adása.
4. egy $0 = 0$ alakú egyenlet elhagyása (csökkenti az egyenletek számát!)

Lineáris egyenletrendszerek

Megoldás kiküszöböléssel

Elemi sorműveletek

- Egy mátrix sorain végzett alábbi műveleteket elemi sorműveleteknek nevezzük:
  - Sorcsere: két sor cseréje ($S_i \leftrightarrow S_j$: az i-edik és a j-edik sorok cseréje.)
  - Beszorzás: egy sor beszorzása egy nemnulla számmal (cS_i: az i-edik sor beszorzása c-vel)
  - Hozzáadás: egy sorhoz egy másik sor konstansszorosának hozzáadása ($S_i + cS_j$: a j-edik sor c-szeresének az i-edik sorhoz adása).
- Hasonlóan definiálhatók az elemi oszlopműveletek ($O_i \leftrightarrow O_j$, cO_i, $O_i + cO_j$).

Lépcsős alak

D Egy mátrix lépcsős alakú, ha

1. a 0-sorok (ha vannak) a mátrix utolsó sorai;
2. bármely két egymás után következő nem-0 sorban az alsó sor elején (legalább eggyel) több 0 van, mint a fölötte lévő sor elején.

A nemnulla sorok első zérustól különböző elemét főelemnek, vezérelemnek vagy pivotelemnek hívjuk. Egy főelem oszlopának főoszlop vagy bázisoszlop a neve.

- A következő mátrixok lépcsős alakúak:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Gauss-módszer

m A Gauss-módszer, -kiküszöbölés vagy -elimináció: lineáris egyenletrendszer megoldása lépcsős alakra hozással (oszloponként haladva), majd a főoszlopok változói lesznek a kötött változók, a többi a szabad. Megoldás visszahelyettesítéssel (backward substitution).

T Bármely test feletti mátrix elemi sorműveletekkel lépcsős alakra hozható.

B
1. nulloszlop letakarása
2. sorcsere után $a_{11} \neq 0$
3. $S_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} S_1$ után a_{11} alatt minden elem 0.
4. takarjuk le az első oszlopot és az első sort, és ha nincs több sor, VÉGE, ha van, menjünk a 1 pontra.

Redukált lépcsős alak (rref = reduced row echelon form)

D Egy mátrix redukált lépcsős, ha

1. lépcsős alakú;
2. minden főelem egyenlő 1-gyel;
3. a főelemek oszlopaiban a főelemeken kívül minden elem 0;

- Vezéregyes
- A következő mátrixok redukált lépcsős alakúak:

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1 & -2 & 0 & -4\\0 & 0 & 1 & 6\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

- Algoritmus: oszloponként haladva először a vezérelemek alatt, majd csak utána az utolsó oszloptól kezdve fölöttük eliminálunk!

Redukált lépcsős alakra hozás

P Hozzuk redukált lépcsős alakra az $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ mátrixot!

M1 $$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[S_3-2S_1]{S_2-S_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}S_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[S_1-3S_2]{S_3+4S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

M2 $$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[S_3-2S_1]{S_2-S_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[S_1-S_2]{\frac{1}{2}S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

T **A redukált lépcsős alak egyértelmű**

Egy test elemeiből képzett bármely mátrix redukált lépcsős alakra hozható. Ez az alak egyértelmű.

- A MATLAB-típusú nyelvekben rref() ez a függvény.

Gauss–Jordan-módszer (megoldás rref-ra hozással)

- $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{\dots} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-S_3]{1/2 S_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[S_1-2S_3]{S_2-\frac{1}{2}S_3}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{S_1-S_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 3 \\ z &= -2 \end{aligned}$$
- Tehát az egyenletrendszer egyetlen megoldása $(x, y, z) = (1, 3, -2)$.

Gauss–Jordan-módszer – több megoldás

- bázisoszlopokhoz tartozó változók: kötött változók, a többi szabad változó.
- $$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\cdots} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[S_1-S_2]{1/2S_2}$$
  $$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{aligned} x_1 + 2x_2 \quad + \frac{3}{2}x_4 + x_5 &= \frac{3}{2} \\ x_3 + \frac{1}{2}x_4 \qquad &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$
- $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (\frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u, s, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t, t, u)$,
- $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vektortér

Vektortér

Absztrakt vektortér

Vektortér absztrakt fogalma

D **Vektortér**

A $\mathcal{V}$ halmazt $\mathbb{F}$ fölötti vektortérnek nevezzük (jel.: $\mathcal{V}_{\mathbb{F}}$), ha tartalmaz egy $\mathbf{0}$-val jelölt elemet, és értelmezve van rajta egy összeadás és egy skalárral szorzás művelet, melyek a következő tulajdonságokkal rendelkeznek: ha $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ és $c, d \in \mathbb{F}$, akkor

(A1)	$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$	az összeadás kommutatív
(A2)	$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$	az összeadás asszociatív
(A3)	$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$	az összeadás nulleleme
(M1)	$(cd)\mathbf{u} = c(d\mathbf{u})$	a két szorzás kompatibilis
(M2)	$1\mathbf{u} = \mathbf{u}$	szorzás a test egységelemével
(M3)	$0\mathbf{u} = \mathbf{0}$	szorzás a test nullelemével
(D1)	$c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$	disztributív
(D2)	$(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$	disztributív.

Példák vektorterekre

- Á $\mathcal{V} = \{\mathbf{0}\}$ bármely test fölött vektortér. Ezt nevezzük zérustérnek.
- P $\mathbb{F}^n$ vektortér $\mathbb{F}$ fölött a szokásos elemenkénti összeadás és skalárral szorzás műveleteivel. Speciálisan $\mathbb{F}^1$, azaz maga $\mathbb{F}$ is tekinthető $\mathbb{F}$ fölötti vektortérnek.
- P $\mathbb{F}^{m\times n}$, mátrixok vektortere
- P $\mathbb{F}[x]$, polinomok vektortere
- P $\mathbb{F}[x]_n = \{f \in \mathbb{F}[x] \mid \deg f \leqslant n\}$, legföljebb n-edfokú pol.
- P $\mathbb{F}[[x]] = \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\}$, a formális hatványsorok
- P $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$, az $\mathbb{R}$-en k-szor folytonosan diffható függvények

Lineáris kombináció

D **Lineáris függetlenség, generátorrendszer, bázis**

Lineáris kombináción $\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{v}_i$ alakú véges összeget értünk, ahol $a_i \in \mathbb{F}$, $\mathbf{v}_i \in \mathcal{V}_\mathbb{F}$. L! $\mathcal{V}_\mathbb{F}$ vektortér. AMH a $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n, \dots\}$ véges vagy végtelen vektorhalmaz lineárisan független, ha minden véges részhalmaza lineárisan független. AMH $\mathcal{B}$ generátorrendszer $\mathcal{V}$-ben (kifeszíti $\mathcal{V}$-t), ha bármely $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektor előáll véges sok $\mathcal{B}$-beli lineáris kombinációjaként. AMH $\mathcal{B}$ a $\mathcal{V}$ egy bázisa, ha

(1) lineárisan független,

(2) generátorrendszer.

T Minden vektortérnek van bázisa.
A zérustéré az üreshalmaz.

Példák bázisra

P Az $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)$,..., $\mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ vektorokból álló halmazt $\mathbb{F}^n$ standard bázisának nevezzük.

P Az $\mathbf{E}_{ij}$ mátrixok bázist alkotnak $\mathbb{F}^{m\times n}$-ben

P A legföljebb n-edfokú polinomok terének $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ egy bázisa.

P $\mathbb{F}[x]$-nek nincs véges bázisa, de $\{1, x, x^2, \ldots\}$ egy bázisa.

P $\mathbb{F}[[x]]$-nek nem generátorrendszere $\{1, x, x^2, \ldots\}$, mert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ nem áll elő véges lineáris kombinációként.

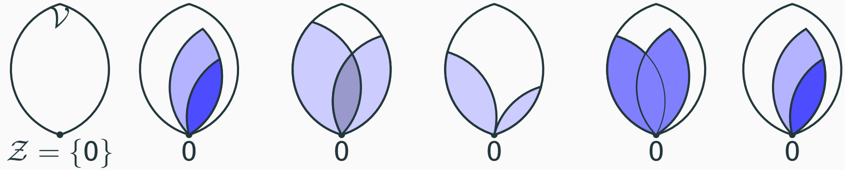
P A végtelen sorozatoknak a $\{0, \ldots, 0, 1, 0, 0, 0 \ldots\}$ típusú sorozatok nem alkotják bázisát.

Vektortér

Alterek

Alterek tulajdonságai és szemléltetésük

D $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ a $\mathcal{V}$ altere, ha maga is vektortér, azaz ha (1) nem üres, (2) zárt a két vektorműveletre. Jelölése: $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$.



- Minden altérnek eleme a nullvektor (ui. $0\mathbf{u} = \mathbf{0} \in \mathcal{V}$).
- Minden altérbeli $\mathbf{x}$ vektorral együtt annak ellentettje (-1-szerese), a $-\mathbf{x}$ vektor is eleme az altérnek.
- Minden vektortér maga is altér (saját maga altere).
- $\mathcal{Z} = \{\mathbf{0}\}$ a zérustér altér. (NEM nulltér!).
- Altér altere altér, azaz ha $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$, és $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{U}$, akkor $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$.
- Alterek metszete altér: $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \mathcal{W}$.
- Két altér egyesítése csak akkor altér, ha egyik altere a másiknak.

Alterek tulajdonságai és szemléltetésük

P Alteret alkotnak-e az alábbi vektorhalmazok $\mathbb{R}^3$-ben?

- $\{\, (x, y, z) \mid x = y,\ z = xy \,\}$,
- $\{\, (s + 2t, s - 1, 2s + t) \mid s, t \in \mathbb{R} \,\}$,
- $\{\, (x, y, z) \mid 2x - y + z = 0 \,\}$,
- $\{\, (x, y, z) \mid x = 2t,\ y = -t,\ z = t,\ t \in \mathbb{R} \,\}$.

M

- Nem. (Pl. $(1, 1, 1)$ benne van, $(2, 2, 2)$ nem.)
- Nem. Nincs benne a nullvektor.
- Igen. Az $\mathbf{n} = (2, -1, 1)$ normálvektorú sík.
- Igen. A $\mathbf{v} = (2, -1, 1)$ vektor skalárszorosai.

Kifeszített altér

D a $\mathbf{v}_i \in \mathcal{V}$ $(i = 1, \dots, k)$ vektorok által kifeszített altér:

$$\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k) = \{\, c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k : c_1, c_2 \dots, c_k \in \mathbb{F} \,\}.$$

Á $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k) \leqslant \mathbb{F}^n$, azaz altér.

Á $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ a minimális altér azok között, melyek tartalmazzák a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorokat.

P a $\mathbf{T} = [t_{i-j}]_{i,j=0}^{n-1}$ Toeplitz mátrix a $2n - 1$ darab $\mathbf{T}_k = [\delta_{i-j,k}]_{i,j=0}^{n-1}$ mátrixok lineáris kombinációja, ahol $\delta_{i,j}$ a Kronecker-delta:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j \\ 0, & \text{ha } i \neq j \end{cases}$$

Vektortér

Egyenletrendszer megoldásai

Nulltér

T Egy n-ismeretlenes $\mathbb{F}$ testbeli együtthatós homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza alteret alkot $\mathbb{F}^n$-ben.

D Az $\mathbf{A}$ együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak alterét az $\mathbf{A}$ mátrix nullterének nevezzük és $\mathcal{N}(\mathbf{A})$-val jelöljük.

P Határozzuk meg a $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix nullterét:

M $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Affin altér

J $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$, $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$, $\mathcal{W} + \mathbf{u} = \{\mathbf{w} + \mathbf{u} : \mathbf{w} \in \mathcal{W}\}$

D a $\mathcal{W} + \mathbf{u}$ affin altér

m ez nem altér, ha $\mathbf{u} \notin \mathcal{W}$.

Á Az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $\mathbf{b}$ előáll az $\mathbf{A}$ oszlopainak lineáris kombinációjaként ($\mathbf{b}$ benne van $\mathbf{A}$ oszlopterében). A lineáris kombináció együtthatói megegyeznek a megoldásvektor koordinátáival.

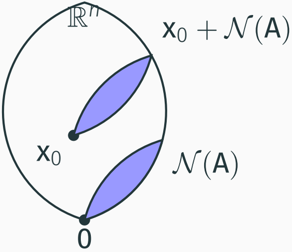
Á Az inhomogén egyenletrendszer összes megoldása a homogén összes megoldásának – azaz $\mathcal{N}(\mathbf{A})$-nak – az inhomogén valamelyik megoldásával való eltoltja. Mindegy melyik megoldást választjuk!

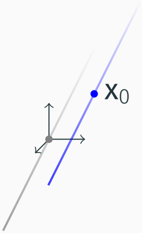
K Az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ összes megoldása egy affin alteret alkot, ami nem altér, ha $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

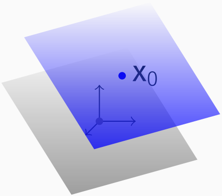
T **Homogén és inhomogén egyenletrendszer megoldásai**

Az inhomogén lineáris $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ *mátrixú egyenletrendszerre:*

$$\boxed{\begin{array}{c}\textit{inhomogén}\\ \textit{összes}\\ \textit{megoldása}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\textit{inhomogén egy}\\ \textit{tetszőleges}\\ \textit{megoldása}\end{array}} + \boxed{\begin{array}{c}\textit{homogén}\\ \textit{összes}\\ \textit{megoldása}\end{array}}$$







Sortér, oszloptér

D Egy mátrix oszlopvektorai által kifeszített alteret oszloptérnek, a sorvektorai által kifeszített alteret sortérnek nevezzük.

Á Az $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$ mátrix sortere $\mathbb{F}^n$ altere, oszloptere $\mathbb{F}^m$ altere.

J $\mathbf{A}$ sortere: $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ vagy $\mathrm{Row}(\mathbf{A})$, oszloptere: $\mathcal{O}(\mathbf{A})$ vagy $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$

T **Sortér és oszloptér változása**

Elemi sorműveletek közben

- *sortér és az*
- *oszlopvektorok közti lineáris kapcsolatok nem változnak.*

K Legyen $\mathbf{B}$ az $\mathbf{A}$ mátrix egy lépcsős alakja. Ekkor

1. $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ sortere megegyezik,
2. az $\mathbf{A}$ oszlopvektorai közt lévő lineáris kapcsolatok azonosak a $\mathbf{B}$ ugyanolyan sorszámú oszlopai közti lin. kapcsolatokkal,
3. $\mathbf{B}$ nemzérus sorvektorai lineárisan függetlenek,
4. a főoszlopok $\mathbf{A}$-ban és $\mathbf{B}$-ben is lineárisan függetlenek.

Az altérbe tartozás vizsgálata

P Határozzuk meg, hogy a $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 2, -2, 1)$ és $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1, 1)$ vektorok által kifeszített altérnek eleme-e az $\mathbf{u} = (-1, 2, -3, 6)$ vektor! Adjunk meg egy ezt bizonyító lineáris kombinációt! Mutassuk meg, hogy a $\mathbf{w} = (-1, 2, -3, 4)$ vektor nem eleme az altérnek!

M $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}\ (= \mathbf{w})$ megoldását keressük. A szimultán egyenletrendszer mátrixa $[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3 \mid \mathbf{u}\ \mathbf{w}]$.

$$\left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 6 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

amiből $(x_1, x_2, x_3) = (3, 2, -2)$, és $\mathbf{w}$ valóban nem áll elő lineáris kombinációként, mert a $\mathbf{w}$-t tartalmazó egyenletrendszer ellentmondásos.

Lineáris függetlenség eldöntése

K Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_k \end{bmatrix}$! Az alábbi állítások ekvivalensek:

- az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,..., $\mathbf{a}_k$ vektorok lineárisan függetlenek;
- az $\mathbf{A}$ együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszernek a triviálison kívül nincs más megoldása;
- az $\mathbf{A}$ lépcsős alakjának minden oszlopában van főelem, azaz $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = k$.

P Mutassuk meg, hogy a 4-dimenziós $(1, 2, 3, 4)$, $(0, 1, 0, 1)$ és $(1, 1, 1, 0)$ vektorok lineárisan függetlenek.

M A vektorokból képzett mátrix és lépcsős alakja

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ami azt mutatja, hogy a hom.lin.egyrsz-nek csak egyetlen megoldása van, azaz az oszlopvektorok lineárisan függetlenek.

Vektortér

Bázis, dimenzió, rang

Bázis meghatározása – első megoldás

P Határozzuk meg az $(1,1,0,-2)$, $(2,3,3,-2)$, $(1,2,3,0)$ és $(1,3,6,2)$ vektorok által kifeszített altér egy bázisát!

1M Sorvektorokkal:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A bázis vektorai $(1,1,0,-2)$, $(0,1,3,2)$.

Bázis meghatározása – második megoldás

2M oszlopvektorokkal a lépcsős alakból:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tehát az adott négy vektor közül az első kettő, azaz az $(1,1,0,-2)$ és $(2,3,3,-2)$ vektorok bázist alkotnak.
Ha a megadott vektorokat más sorrendben írjuk a mátrixba, másik bázist kaphatunk.

Felírás bázisvektorok lineáris kombinációjaként

M a redukált lépcsős alakból több is látszik:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ennek alapján:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = -3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Koordinátás alak e bázisban

P Jelölje $\mathcal{B} = \{(1,1,0,-2),(2,3,3,-2)\}$ a bázist. A redukált lépcsős alak nemzérus soraiból

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

kapjuk a négy vektor koordinátás alakjait:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}},\ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}},\ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}},\ \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Bázis és dimenzió

T Minden vektortérnek van bázisa. (a zérustéré az üreshalmaz)

Á L! $\mathcal{U}$ vektortér, és $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\} \subseteq \mathcal{U}$. A következők ekvivalensek:

- $\mathcal{B}$ lineárisan független generátorrendszere $\mathcal{U}$-nak (azaz bázis),
- $\mathcal{B}$ minimális generátorrendszer,
- $\mathcal{B}$ maximális független vektorokrendszer.

T Bázis-tétel Ha a $\mathcal{V}$ vektortérnek van n-elemű bázisa, akkor minden bázisa n-elemű.

D A $\mathcal{V}$ vektortér n-dimenziós, ha van n-elemű bázisa. (véges dimenziós vektortér)

Mátrix, rang, dimenzió

Á **Dimenzió $=$ rang**

Egy mátrix rangja, sorterének dimenziója és oszlopterének dimenziója megegyezik. (Ebből következőleg $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}^T)$*.)*

T **Dimenziótétel – rang–nullitási tétel**

Bármely $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m\times n}$ *mátrix esetén a sortér dimenziójának (=rangjának) és a nulltér dimenziójának (=nullitásának) összege* n*. Képlettel:*

$$\dim(\mathcal{S}(\mathbf{A})) + \dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = n.$$

B kötött változók száma + szabad változók száma = n

Vektortér

A lineáris algebra alaptétele (valós eset)

Valós mátrixok sor- és nulltere

D Egy valós vektortér két altere merőleges, ha bárhogy választva egy vektort az egyik, egy másikat a másik altérből, azok merőlegesek.

D Két altér kiegészítő altér, ha $\mathcal{V}$ bármely vektora egyértelműen előáll az egyik és a másik altérbe eső vektorok összegeként.

D A $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$ altér merőlegesén a rá merőleges vektorok alterét értjük, jele $\mathcal{W}^\perp$ („W perp”).

T **A lineáris algebra alaptétele**

Minden valós mátrix sortere és nulltere merőleges kiegészítő alterei egymásnak.

K $\mathcal{S}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\mathcal{N}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{S}(\mathbf{A})$.

K $\mathcal{O}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A}^T)$.

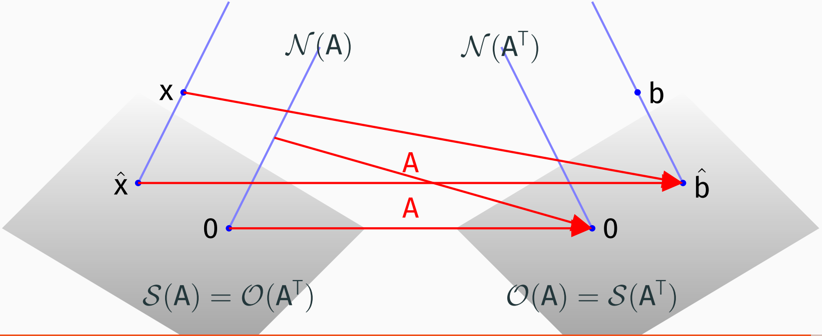
K Minden $\mathbf{x}$ vektor egyértelműen előáll egy sortérbe és egy nulltérbe eső vektor összegeként.

D **Kitüntetett alterek**

Az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix négy kitüntetett altere:

$$\mathcal{S}(\mathbf{A}) = \mathcal{O}(\mathbf{A}^\top),\ \mathcal{N}(\mathbf{A}),\ \mathcal{O}(\mathbf{A}) = \mathcal{S}(\mathbf{A}^\top),\ \mathcal{N}(\mathbf{A}^\top).$$

L! $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ egy 2-rangú mátrix. Ekkor



Vektortér

Sortérbe eső egyetlen megoldás

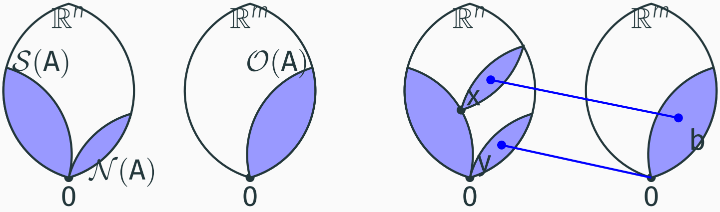
Valós együtthatós egyenletrendszer megoldásai

T **Lineáris egyenletrendszer megoldásai**

Minden valós együtthatós megoldható (konzisztens) lineáris egyenletrendszerre igazak a következő állítások:

- *egyetlen megoldása esik az együtthatómátrix sorterébe;*
- *a sortérbe eső megoldás az összes megoldás közül a legkisebb abszolút értékű;*
- *az összes megoldás előáll úgy, hogy a sortérbe eső megoldáshoz hozzáadjuk a homogén rész összes megoldását.*

Megoldások és a kitüntetett alterek



A sortérbe eső megoldás megkeresése

P Határozzuk meg az

$$\begin{aligned} x + y + z + 3u + 2w &= 4 \\ x + 2y + z + 5u + 2w &= 5 \\ 2x + 3y + z + 8u + 3w &= 7 \\ 2x + 3y + 2z + 8u + 4w &= 9 \end{aligned}$$

egyenletrendszer minimális abszolút értékű megoldását!

- A redukált lépcsős alak:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 8 & 4 & 9 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Így a megoldás:

$$(x, y, z, u, w) = (1, 1, 2, 0, 0) + (-1, -2, 0, 1, 0)s + (-1, 0, -1, 0, 1)t.$$

- A sortérbe eső megoldás merőleges a homogén egyenletrendszer megoldásait kifeszítő két vektorra, azaz a $(-1, -2, 0, 1, 0)$, $(-1, 0, -1, 0, 1)$ vektorokra.

- Ezért a redukált lépcsős alak szerinti egyenletrendszerhez ezt kell adni:

$$\begin{aligned} -x - 2y \qquad + u \qquad &= 0 \\ -x \qquad - z \qquad + w &= 0 \end{aligned}$$

- Így a kiegészített egyenletrendszer az eredetiből (vagy a lépcsős alakjából) és az előző egyenletekből áll:

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4/17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5/17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 19/17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6/17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 15/17 \end{array}\right],$$

- tehát a keresett megoldás $\frac{1}{17}(-4, 5, 19, 6, 15)$.