



BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM



Haladó lineáris algebra

BMETE90MX54



Euklideszi tér, ortogonalizáció

2017-02-28 IB026



Wetl Ferenc

ALGEBRA TANSZÉK

Valós euklideszi tér

Skaláris szorzat másik bázisban

- P** Legyen $\mathcal{B} = \{(2, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 1)\}$. Milyen képlettel számolható ki az $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ skaláris szorzat, ha a két vektor \mathcal{B} -beli koordinátás alakját ismerjük?
- M** Jelölés: \mathbf{x} vektor \mathcal{B} -beli koordinátás alakja $\mathbf{x}_{\mathcal{B}}$, a standard alak $\mathbf{x}_{\mathcal{E}}$. Ekkor $\mathbf{x}_{\mathcal{E}} = \mathbf{A}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} \mathbf{x}_{\mathcal{B}}$. Így

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}_{\mathcal{E}}^{\top} \mathbf{y}_{\mathcal{E}} = (\mathbf{A}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} \mathbf{x}_{\mathcal{B}})^{\top} \mathbf{A}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} \mathbf{y}_{\mathcal{B}} = \mathbf{x}_{\mathcal{B}}^{\top} (\mathbf{A}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}^{\top} \mathbf{A}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}) \mathbf{y}_{\mathcal{B}} = \mathbf{x}_{\mathcal{B}}^{\top} \mathbf{B} \mathbf{y}_{\mathcal{B}}.$$

Esetünkben

$$\mathbf{A}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}^{\top} \mathbf{A}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- K** Mit tudunk a $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{\top} \mathbf{A}$ mátrixról?
Szimmetrikus, invertálható, de ez még kevés.

A skaláris szorzás alaptulajdonságai \mathbb{R}^n -ben

T Legyen \mathbf{u} , \mathbf{v} és \mathbf{w} az \mathbb{R}^n három tetszőleges vektora, és legyen c egy tetszőleges valós. Ekkor

a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ a művelet fölcserélhető (kommutatív)

b) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ disztributív

c) $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ a két szorzás kompatibilis

d) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ és $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

m A d) pont szerint egy másik bázisban felírva a skaláris szorzást, $\mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x} > 0$ kell $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektorra.

D A $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrixot pozitív definitnek nevezik, ha $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} : \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x} > 0$.

Valós euklideszi tér

D Legyen \mathcal{V} egy tetszőleges **valós** vektortér, és legyen

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$$

olyan függvény, melyre bármely $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ vektorok és $c \in \mathbb{R}$ skalár esetén

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \quad \text{szimmetria}$$

$$\langle c\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \quad \text{homogenitás}$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \quad \text{additivitás}$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0, \text{ ha } \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \quad \text{pozitivitás}$$

E $\langle \cdot, \cdot \rangle$ függvényt a \mathcal{V} -n értelmezett **skaláris szorzásnak**, a skaláris szorzással ellátott \mathcal{V} vektorteret **euklideszi térnek** nevezzük.

m Nem vihető át *komplex vagy véges testekre* módosítás nélkül!

D **Bilineáris** fv.: kétváltozós, mindkét változójában lineáris fv.

Példák valós euklideszi térekre

- P $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \mathbf{y}$ skaláris szorzás \mathbb{R}^n -ben, ha \mathbf{A} invertálható. (Be fogjuk látni, hogy $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{y}$ pontosan akkor skaláris szorzás, ha \mathbf{B} pozitív definit.)
- P Az $x = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$ sorozatok, melyekre $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 < \infty$.
vektorteret alkotnak, melyen skaláris szorzást definiál
 $\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$.
- P Az $[a, b]$ intervallumon folytonos függvények $C[a, b]$ vektorterén az $f, g \in C[a, b]$ függvényekre az $\langle f, g \rangle = \int_a^b fg$ skaláris szorzás. (E tér altere a polinomok tere, az is euklideszi tér e skalárszorzással.)

Távolság és szög valós euklideszi térben

D LI $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ két tetszőleges vektor.

1. Az \mathbf{u} vektor **hosszán (abszolút értékén, normáján)** önmagával vett skaláris szorzatának gyökét értjük, azaz

$$|\mathbf{u}| = \|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}. \quad (1)$$

2. Az \mathbf{u} és \mathbf{v} vektorok **(hajlás)szögének** koszinusza:

$$\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\angle} := \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|} \quad (2)$$

3. Amh az \mathbf{u} és \mathbf{v} vektorok **merőlegesek** egymásra, ha

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0. \quad (3)$$

4. A két vektor (végpontjának) **távolsága**

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |\mathbf{u} - \mathbf{v}| \quad (4)$$

Koordinátás alakok

P $\mathbf{u} = (2, 3, 4, 14)$, $\mathbf{v} = (4, 6, -10, 10)$, $\mathbf{w} = (0, 3, 6, -2)$, $|\mathbf{u}| = ?$,
 $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = ?$, $\cos(\mathbf{u}, \mathbf{w})_{\angle} = ?$

M Az (1), a (4) és a (2) képletekkel:

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2 + 14^2} = \sqrt{225} = 15,$$

$$\begin{aligned}d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \sqrt{(2 - 4)^2 + (3 - 6)^2 + (4 - (-10))^2 + (14 - 10)^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 3^2 + 14^2 + 4^2} = 15\end{aligned}$$

$$\cos(\mathbf{u}, \mathbf{w})_{\angle} = \frac{2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + 14 \cdot (-2)}{15 \cdot \sqrt{0^2 + 3^2 + 6^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{21}.$$

Ortonormált és ortogonális bázis

OR és ONR lineáris függetlensége

- D A páronként merőleges vektorokból álló vektorrendszert **ortogonális** rendszernek (OR), az egységvektorokból álló OR-t **ortonormált** rendszernek (ONR) nevezzük.
- Á A $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ vektorrendszer vektorai zérusvektortól különbözőek és OR-t alkotnak, akkor
1. független,
 2. $\{\mathbf{v}_i/|\mathbf{v}_i|\}$ ONR.
- B TFH valamely c_1, c_2, \dots, c_k konstansokra $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$. Mivel $i \neq j$ esetén $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$, ezért a \mathbf{v}_i vektorral beszorozva $c_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = 0$, amiből $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle \neq 0$ miatt következik, hogy $c_i = 0$.
2. $\frac{\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle}{|\mathbf{v}_i||\mathbf{v}_j|} = \left\langle \frac{\mathbf{v}_i}{|\mathbf{v}_i|}, \frac{\mathbf{v}_j}{|\mathbf{v}_j|} \right\rangle$
- K Egy zérusvektort nem tartalmazó OR, vagy ONR mindig bázisa az általa kifeszített altérnek. (Továbbiakban ONB)

Legjobb közelítés ONB esetén

T V valós euklideszi tér, $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k\} \subset V$ ONR és a $\mathbf{v} \in V$ vektor. Ekkor a

$$\hat{\mathbf{v}} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_2 + \dots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_k \rangle \mathbf{e}_k \quad (5)$$

vektor az $\mathcal{A} = \text{span}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$ altér \mathbf{v} -hez legközelebb fekvő pontja, azaz $\hat{\mathbf{v}} = \text{proj}_{\mathcal{A}} \mathbf{v}$.

B $\langle \mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}, \mathbf{e}_j \rangle = \langle \mathbf{v} - \sum_{i=1}^k \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = 0$ ($j = 1, 2, \dots, k$), tehát $\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}} \perp \mathcal{A}$, azaz $\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}} \in \mathcal{A}^\perp$.

Így a merőleges vetület definíciója szerint $\hat{\mathbf{v}} = \text{proj}_{\mathcal{A}} \mathbf{v}$.

K ha V k -dimenziós (\mathcal{E} a V bázisa), akkor

$$\mathbf{v} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_2 + \dots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_k \rangle \mathbf{e}_k$$

K Ha $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\} \subset V$ nullvektort nem tartalmazó OR, akkor

$$\hat{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^k \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{a}_i \rangle}{|\mathbf{a}_i|^2} \mathbf{a}_i, \text{ és ha } \mathcal{A} \text{ ortogonális bázis, akkor } \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{a}_i \rangle}{|\mathbf{a}_i|^2} \mathbf{a}_i. \quad 9$$

Legjobb közelítés ONB esetén 2

- m** A $\langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_i \rangle$ skalárt a \mathbf{v} vektor \mathbf{e}_i -hez tartozó Fourier-együtthatójának is nevezik.
- P** Határozzuk meg a $(3, 1, 2)$ pontnak az $(2, 3, 6)$ és $(3, -6, 2)$ vektorok által kifeszített síkra való merőleges vetületét!
- M** E két vektor a síkban OR-t alkot! Normálás után $\mathbf{a} = \frac{1}{7}(2, 3, 6)$ és $\mathbf{b} = \frac{1}{7}(3, -6, 2)$ ONR.

Behelyettesítés:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{v}} &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{a} + \langle \mathbf{v}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{b} \\ &= \left\langle (3, 1, 2), \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right) \right\rangle \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right) + \left\langle (3, 1, 2), \left(\frac{3}{7}, \frac{-6}{7}, \frac{2}{7}\right) \right\rangle \left(\frac{3}{7}, \frac{-6}{7}, \frac{2}{7}\right) \\ &= 3\left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right) + 1\left(\frac{3}{7}, \frac{-6}{7}, \frac{2}{7}\right) \\ &= \left(\frac{9}{7}, \frac{3}{7}, \frac{20}{7}\right).\end{aligned}$$

Ortogonalizáció

Gram–Schmidt-ortogonalizáció

T Ha $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$ egy független vektorrendszer egy \mathcal{V} euklideszi térben, akkor létezik olyan ortogonális $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k\}$ vektorrendszer, hogy minden $i = 1, 2, \dots, k$ esetén

$$\text{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_i) = \text{span}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_i). \quad (6)$$

Ebből normálással ortonormált rendszert kapunk:

$$\left\{ \frac{\mathbf{b}_1}{|\mathbf{b}_1|}, \frac{\mathbf{b}_2}{|\mathbf{b}_2|}, \dots, \frac{\mathbf{b}_k}{|\mathbf{b}_k|} \right\}$$

m Igazolható, hogy a Gram–Schmidt-ortogonalizáció működik összefüggő vektorokból álló vektorrendszerre is, annyi változással, hogy pontosan akkor lesz $\mathbf{b}_i = \mathbf{0}$, ha \mathbf{a}_i nem független a kisebb indexű vektoroktól, azaz \mathbf{a}_i benne van a $\text{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1})$ altérben.

- B $\text{span}(\mathbf{a}_1) = \text{span}(\mathbf{b}_1)$ összefüggés teljesül, ha $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1$.
 $\text{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \text{span}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ és $\mathbf{b}_1 \perp \mathbf{b}_2$ teljesül, ha \mathbf{b}_2 az \mathbf{a}_2 -nek a \mathbf{b}_1 által kifeszített altérre merőleges összetevője:

$$\mathbf{b}_2 := \mathbf{a}_2 - \left\langle \mathbf{a}_2, \frac{\mathbf{b}_1}{|\mathbf{b}_1|} \right\rangle \frac{\mathbf{b}_1}{|\mathbf{b}_1|} = \mathbf{a}_2 - \frac{\langle \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1 \rangle}{|\mathbf{b}_1|^2} \mathbf{b}_1$$

$\mathbf{b}_2 \neq \mathbf{0}$, hisz $\mathbf{b}_2 = \mathbf{0}$ esetén $\mathbf{a}_2 = \frac{\langle \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1 \rangle}{|\mathbf{b}_1|^2} \mathbf{b}_1 = \frac{\langle \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1 \rangle}{|\mathbf{b}_1|^2} \mathbf{a}_1$ lenne, azaz \mathbf{a}_1 és \mathbf{a}_2 nem lenne független, ez ellentmondás.

$\text{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \text{span}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \checkmark$

$\mathbf{b}_i \Rightarrow \mathbf{b}_{i+1}$: az \mathbf{a}_{i+1} vektornak a $\text{span}\left(\frac{\mathbf{b}_1}{|\mathbf{b}_1|}, \frac{\mathbf{b}_2}{|\mathbf{b}_2|}, \dots, \frac{\mathbf{b}_i}{|\mathbf{b}_i|}\right)$ altérre merőleges összetevője legyen \mathbf{b}_{i+1}

$$\mathbf{b}_{i+1} := \mathbf{a}_{i+1} - \sum_{j=1}^i \frac{\langle \mathbf{a}_{i+1}, \mathbf{b}_j \rangle}{|\mathbf{b}_j|^2} \mathbf{b}_j$$

$\mathbf{b}_{i+1} \neq \mathbf{0}$, különben \mathbf{a}_{i+1} nem volna független az $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i\}$ vektorrendszerrel, azaz \mathcal{A} nem volna független.

$\mathbf{b}_{i+1} \in \text{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i+1})$, $\mathbf{a}_{i+1} \in \text{span}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{i+1}) \rightsquigarrow (6) \checkmark$ 12

Gram-Schmidt-ortogonalizáció: 1. példa

P Ortogonalizáljuk a $\{(3, 6, 2), (1, 9, -4), (1, 2, 3)\}$ vektorrendszert!
Adjuk meg a tér ortonormált bázisát is!

M $\mathbf{b}_1 = (3, 6, 2)$

$$\mathbf{b}_2 = (1, 9, -4) - \frac{(1, 9, -4) \cdot (3, 6, 2)}{(3, 6, 2) \cdot (3, 6, 2)}(3, 6, 2) = (-2, 3, -6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_3 &= (1, 2, 3) - \frac{(1, 2, 3) \cdot (3, 6, 2)}{(3, 6, 2) \cdot (3, 6, 2)}(3, 6, 2) - \\ &\frac{(1, 2, 3) \cdot (-2, 3, -6)}{(-2, 3, -6) \cdot (-2, 3, -6)}(-2, 3, -6) = \frac{1}{7}(-6, 2, 3) \end{aligned}$$

Az ONR:

$$\left\{ \frac{1}{7}(3, 6, 2), \frac{1}{7}(-2, 3, -6), \frac{1}{7}(-6, 2, 3) \right\}$$

Gram-Schmidt-ortogonalizáció: 2. példa

P Keressünk ortonormált bázist az $(1, 1, 1, 1)$, $(3, -1, 3, -1)$, $(6, 2, 2, -2)$ vektorok által kifeszített altérben.

M OR:

$$\mathbf{b}_1 = (1, 1, 1, 1)$$

$$\mathbf{b}_2 = (3, -1, 3, -1) - \frac{(3, -1, 3, -1) \cdot (1, 1, 1, 1)}{(1, 1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1, 1)}(1, 1, 1, 1) = (2, -2, 2, -2)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_3 &= (6, 2, 2, -2) - \frac{(6, 2, 2, -2) \cdot (1, 1, 1, 1)}{(1, 1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1, 1)}(1, 1, 1, 1) \\ &\quad - \frac{(6, 2, 2, -2) \cdot (2, -2, 2, -2)}{(2, -2, 2, -2) \cdot (2, -2, 2, -2)}(2, -2, 2, -2) = (2, 2, -2, -2)\end{aligned}$$

Az ONR (ONB):

$$\left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \right\}$$

Gram–Schmidt-ortogonalizáció: 3. példa

P Keressünk ortonormált bázist az $(1, 1, 1, 1)$, $(3, -1, 3, -1)$, $(4, 0, 4, 0)$, $(6, 2, 2, -2)$ vektorok által kifeszített altérben.

M OR:

$$\mathbf{b}_1 = (1, 1, 1, 1)$$

$$\mathbf{b}_2 = (3, -1, 3, -1) - \frac{(3, -1, 3, -1) \cdot (1, 1, 1, 1)}{(1, 1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1, 1)}(1, 1, 1, 1) = (2, -2, 2, -2)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_3 &= (4, 0, 4, 0) - \frac{(4, 0, 4, 0) \cdot (1, 1, 1, 1)}{(1, 1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1, 1)}(1, 1, 1, 1) \\ &\quad - \frac{(4, 0, 4, 0) \cdot (2, -2, 2, -2)}{(2, -2, 2, -2) \cdot (2, -2, 2, -2)}(2, -2, 2, -2) = (0, 0, 0, 0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_3 &= (6, 2, 2, -2) - \frac{(6, 2, 2, -2) \cdot (1, 1, 1, 1)}{(1, 1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1, 1)}(1, 1, 1, 1) \\ &\quad - \frac{(6, 2, 2, -2) \cdot (2, -2, 2, -2)}{(2, -2, 2, -2) \cdot (2, -2, 2, -2)}(2, -2, 2, -2) = (2, 2, -2, -2)\end{aligned}$$

ONR, mint az előző példában.

Euklideszi terek izomorfizmusa

- T** \mathcal{V} egy valós n -dimenziós euklideszi tér. Ekkor létezik olyan $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ izomorfizmus, mely skalárszozattartó is, azaz amelyre $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}: \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = f(\mathbf{u}) \cdot f(\mathbf{v})$ (itt \cdot a standard skalárszorzás).
- B** \mathcal{V} egy bázisát ortogonalizálva kapjuk \mathcal{V} egy $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ ONB-át. Ezen előírunk egy f függvényt, mely kiterjeszhető lineáris leképezéssé: $f: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^n; \mathbf{b}_i \mapsto f(\mathbf{b}_i) = \mathbf{e}_i$.
- $\text{Im } f = \text{span}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \dim \text{Ker } f = n - n = 0 \rightsquigarrow f$ izom.
- A \mathcal{V} -beli $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n u_i \mathbf{b}_i$, $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v_i \mathbf{b}_i$ vektorokra:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= \sum_{i,j} u_i v_j \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j \rangle = \sum_i u_i v_i = (u_1, \dots, u_n) \cdot (v_1, \dots, v_n) \\ &= \left(\sum_i u_i \mathbf{e}_i \right) \cdot \left(\sum_j v_j \mathbf{e}_j \right) = f(\mathbf{u}) \cdot f(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Néhány következmény

m Tehát minden végesdimenziós valós euklideszi tér azonosítható a standard skalársorzattal ellátott \mathbb{R}^n euklideszi térrel. Így az \mathbb{R}^n euklideszi térre bizonyított állítások igazak maradnak!

T **CBS-egyenlőtlenség** ! \mathcal{V} végesdimenziós valós euklideszi tér.
Ekkor tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektorokra

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq |\mathbf{u}| |\mathbf{v}|. \quad (7)$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha \mathbf{u} és \mathbf{v} lineárisan összefüggők, azaz $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$.

T Tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|,$$

egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{u} \uparrow\uparrow \mathbf{v}$.

További következmények

T Bármely $\mathcal{W} \leq \mathbb{R}^n$ altér ONB-a kiegészíthető \mathbb{R}^n ONB-ává.

B Kiegészítjük a $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k\} \subset \mathcal{W}$ ONB-t az \mathbb{R}^n bázisává:

$$\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_n\},$$

majd azon elvégezzük a Gram–Schmidt-eljárást: ez \mathcal{W} ONB-át

helyben hagyja: $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n\}$

További következmények

K $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$:

1. $\mathcal{W} \oplus \mathcal{W}^\perp = \mathbb{R}^n$,
2. $(\mathcal{W}^\perp)^\perp = \mathcal{W}$.

B 1. $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ a fent megkonstruált bázis, így $\mathcal{W} = \text{span}(e_1, \dots, e_k)$.

Á $\mathcal{W}^\perp = \text{span}(e_{k+1}, \dots, e_n)$

$\mathcal{W}^\perp \supseteq \text{span}(e_{k+1}, \dots, e_n)$ nyilvánvaló $\rightsquigarrow \mathcal{W} + \mathcal{W}^\perp = \mathbb{R}^n$,
másképp $\mathcal{W} \cap \mathcal{W}^\perp = \{0\} \rightsquigarrow \mathcal{W} \oplus \mathcal{W}^\perp = \mathbb{R}^n$

2. $(\mathcal{W}^\perp)^\perp \supseteq \mathcal{W} \checkmark$

$\dim(\mathcal{W}) + \dim(\mathcal{W}^\perp) = n$, $\dim(\mathcal{W}^\perp) + \dim((\mathcal{W}^\perp)^\perp) = n \rightsquigarrow$
 $\dim(\mathcal{W}) = \dim((\mathcal{W}^\perp)^\perp) \rightsquigarrow (\mathcal{W}^\perp)^\perp = \mathcal{W}$.

QR-felbontás

QR-felbontás

Szemiortogonális mátrixok

Ortogonalis és szemiortogonalis mátrixok

- D Egy valós négyzetes mátrix **ortogonalis**, ha oszlopvektorai vagy sorvektorai ONR-t alkotnak. Ha nem kötjük ki, hogy a mátrix négyzetes legyen, **szemiortogonalis** mátrixról beszélünk.
- m Szerencsétlen szóhasználat (ortogonalis – ortonormált).
- m Minden ortogonalis mátrix szemiortogonalis is.
- m Egy nem négyzetes mátrixnál vagy csak a sorai, vagy csak az oszlopai alkothatnak ONR-t, négyzetesnél mindkettő (bizonyítjuk).
- m Az egységmátrix és minden permutációmátrix ortogonalis.
- P Melyek ortogonalisak és melyek szemiortogonalisak?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & -3 \\ 3 & -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

- M Mindhárom mátrix szemiortogonalis, **C** ortogonalis.

Szemiortogonális mátrixok

T Legyen $m \geq n$ és $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Az alábbi állítások **ekvivalensek**:

1. \mathbf{Q} szemiortogonális,
2. $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}_n$.

m Ha $m \leq n$, \mathbf{Q} pontosan akkor szemiortogonális, ha $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}_m$.

m A 2. állítás algebrai nyelven azt mondja, hogy $m \geq n$ esetén \mathbf{Q} pontosan akkor szemiortogonális, ha transzponáltja a bal oldali inverze.

QR-felbontás

QR-felbontás és a GS-ortogonalizáció

QR-felbontás definíciója

- m elemi sorműveletekkel háromszögalakra hozás \rightarrow LU-felbontás
ortogonalizációs eljárás eredménye \rightarrow QR-felbontás
- D Legyen \mathbf{A} egy teljes oszloprangú mátrix. Az $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ felbontást **QR-felbontásnak** vagy **redukált QR-felbontásnak** nevezzük, ha \mathbf{Q} az \mathbf{A} -val azonos méretű szemiortogonális mátrix, és \mathbf{R} négyzetes felső háromszögmátrix, főátlójában pozitív elemekkel.
- m A \mathbf{Q} mátrixot új oszlopvektorok hozzávételével kiegészítjük egy ortogonális mátrixszá, az \mathbf{R} mátrixot zérussorok hozzávételével egy $m \times n$ -es felső háromszögmátrixszá, akkor ezek szorzata is \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \hat{\mathbf{Q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{QR} + \hat{\mathbf{Q}}\mathbf{0} = \mathbf{QR}.$$

Ez a **teljes QR-felbontás** (másutt ezt a QR-felbontás). Itt \mathbf{A} -t egy ortog. és egy \mathbf{A} -val azonos méretű felső háromszögm. szorzata.

A QR-felbontás létezése és egyértelműsége

- T** Bármely valós, teljes oszloprangú \mathbf{A} mátrixnak létezik QR-felbontása, azaz létezik egy szemiorтогоnalis \mathbf{Q} mátrix és egy \mathbf{R} felső háromszögmátrix pozitív főátlóbeli elemekkel, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$. Az így kapott felbontás egyértelmű.
- B** $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_k] \in \mathbb{R}^{n \times k}$ (\mathbf{A} teljes oszloprangú $\rightsquigarrow k \leq n$).
Létezés: Az ortogonalizáció egységvektorait jelölje \mathbf{q}_i ($i = 1, 2, \dots, k$), tehát $\text{span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i) = \text{span}(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_i)$. Így léteznek olyan r_{ij} skalárok, hogy

$$\mathbf{a}_1 = r_{11}\mathbf{q}_1$$

$$\mathbf{a}_2 = r_{12}\mathbf{q}_1 + r_{22}\mathbf{q}_2$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{a}_k = r_{1k}\mathbf{q}_1 + r_{2k}\mathbf{q}_2 + \dots + r_{kk}\mathbf{q}_k.$$

(8)

Ezt mátrixszorzat-alakba írva

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \dots & \mathbf{q}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1k} \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_{kk} \end{bmatrix} = \mathbf{QR}.$$

A Gram–Schmidt-eljárásból az is látható, hogy $r_{ii} = |\mathbf{b}_i| \rightsquigarrow r_{ii} > 0$.

R kiszámolása: $\mathbf{A} = \mathbf{QR} \rightsquigarrow \mathbf{Q}^T \mathbf{A} = \mathbf{Q}^T \mathbf{QR} = \mathbf{I}_k \mathbf{R} = \mathbf{R} \rightsquigarrow \mathbf{R} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A}$.

Egyértelműség: Tfh $\mathbf{A} = \mathbf{QR} = \hat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{R}}$, ahol $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \hat{\mathbf{Q}}^T \hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{I}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{A} &= (\mathbf{QR})^T \mathbf{QR} = \mathbf{R}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{QR} = \mathbf{R}^T \mathbf{R}, & \rightsquigarrow \mathbf{R}^T \mathbf{R} &= \hat{\mathbf{R}}^T \hat{\mathbf{R}} \rightsquigarrow (\hat{\mathbf{R}}^{-1})^T \mathbf{R}^T = \hat{\mathbf{R}} \mathbf{R}^{-1}. \\ \mathbf{A}^T \mathbf{A} &= (\hat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{R}})^T \hat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{R}}^T \hat{\mathbf{Q}}^T \hat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{R}}^T \hat{\mathbf{R}}. \end{aligned}$$

A bal oldal alsó, a jobb oldal felső háromszögmátrix \rightsquigarrow mindkét szorzat diagonális. Jelölje \mathbf{R} (ill. $\hat{\mathbf{R}}$) főátlója elemeit r_i (ill. \hat{r}_i).

$$\begin{aligned} \frac{r_i}{\hat{r}_i} &= \frac{\hat{r}_i}{\hat{r}_i} \rightsquigarrow r_i = \hat{r}_i \quad (r_i > 0 \text{ és } \hat{r}_i > 0 \text{ miatt}) \rightsquigarrow (\hat{\mathbf{R}}^{-1})^T \mathbf{R}^T = \hat{\mathbf{R}} \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{I} \rightsquigarrow \\ \mathbf{R} &= \hat{\mathbf{R}} \rightsquigarrow \mathbf{A} = \mathbf{QR} = \hat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{R}} \text{ miatt } \mathbf{Q} = \hat{\mathbf{Q}}. \end{aligned}$$

P Határozzuk meg az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontását.

M A GS második példában a $(1, 1, 1, 1)$, $(3, -1, 3, -1)$, $(6, 2, 2, -2)$ bázisból az ONB: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$$Q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R = Q^T A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Valóban,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

- m A Matlab/Octave programok nem biztosítják, hogy \mathbf{R} főátlójában pozitív elemek legyenek.
- Á Ha $\mathbf{A} = \mathbf{Q}'\mathbf{R}'$, ahol \mathbf{Q}' szemiortogonális, de \mathbf{R}' főátlójában az i -edik elemek negatívak, ahol $i \in \mathcal{I}$ és \mathcal{I} egy indexhalmaz, akkor \mathbf{R}' i -edik sorát és \mathbf{Q}' i -edik oszlopát -1 -gyel szorozva minden $i \in \mathcal{I}$ -re az \mathbf{A} QR-felbontását kapjuk.
- B $\mathbf{A} = \mathbf{Q}'\mathbf{R}' = \mathbf{Q}'\mathbf{E}\mathbf{E}'\mathbf{R}'$, ahol \mathbf{E} az \mathbf{I} -ből az i -edik elem -1 -re változtatásával kapható ($i \in \mathcal{I}$).

QR-felbontás

Egyenletrendszer megoldása

Egyenletrendszer optimális megoldása QR-felbontással

T Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ teljes oszloprangú, $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ egy QR-felbontása, és $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer egyetlen sortérbe eső optimális megoldása $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T\mathbf{b}$, ami megkapható az

$$\mathbf{R}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}^T\mathbf{b}$$

egyenletrendszerből egyszerű visszahelyettesítéssel is.

B A normálegyenletből indulva

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T\mathbf{b} \quad \mathbf{A} = \mathbf{QR} \text{ behelyettesítése után}$$

$$(\mathbf{QR})^T\mathbf{QR}\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{QR})^T\mathbf{b}$$

$$\mathbf{R}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{QR}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{b} \quad \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{R}^T\mathbf{R}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{b} \quad \text{balról szorzás az } (\mathbf{R}^T)^{-1} \text{ mátrixszal}$$

$$\mathbf{R}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}^T\mathbf{b}.$$

K Ha $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ teljes oszloprangú, akkor $\mathbf{A}^+ = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T$.

Egyenletrendszer optimális megoldása QR-felbontással

P Oldjuk meg QR-felbontással:

$$x + 3y + 6z = 8$$

$$x - y + 2z = 2$$

$$x + 3y + 2z = 2$$

$$x - y - 2z = 0$$

$$\text{QR-felbontás: } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{R}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}^T \mathbf{b}: \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Megoldás visszahelyettesítéssel: $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = (1, 0, 1)$.

Ortogonalis mátrixok

Ortogonalis mátrixok

T Legyen $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Az alábbi állítások ekvivalensek:

1. Q oszlopvektorai ortonormált rendszert alkotnak.
2. $Q^T Q = I_n$.
3. $Q^{-1} = Q^T$.
4. $Q Q^T = I_n$.
5. Q sorvektorai ortonormált rendszert alkotnak.

B $1 \Rightarrow 2$: az előző állításban láttuk.

$2 \Rightarrow 3$: Q négyzetes $\rightsquigarrow Q^T Q = I$ miatt Q invertálható $\rightsquigarrow Q^{-1} = Q^T$.

$3 \Rightarrow 4$: $Q^{-1} = Q^T \rightsquigarrow Q Q^T = I_n$.

$4 \Rightarrow 5$: $Q Q^T = I_n$ (sorvektorszor-oszlopvektor) $\rightsquigarrow Q$ sorvektorai ONB-t alkotnak.

$5 \Rightarrow 1$: Bizonyítottuk, hogy $1 \Rightarrow 5$. Alkalmazzuk ezt Q^T -ra.

Ortogonalis mátrix inverze a transzponáltja

- Számítsuk ki az

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & -3 \\ 3 & -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

mátrixok inverzét!

- M** Mindhárom mátrix ortogonalis, tehát az inverzek:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ortogonalis mátrixhoz tartozó mátrixleképezés

T Legyen $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Az alábbi állítások ekvivalensek:

1. \mathbf{Q} ortogonális.
2. $|\mathbf{Q}\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$ minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektorra.
3. $\mathbf{Q}\mathbf{x} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vektorra.

B 1 \Rightarrow 2: Ha \mathbf{Q} ortogonális, akkor minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vektorra

$$|\mathbf{Q}\mathbf{x}|^2 = \mathbf{Q}\mathbf{x} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{x} = (\mathbf{Q}\mathbf{x})^T (\mathbf{Q}\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2.$$

2 \Rightarrow 3: Mivel $|\mathbf{Q}(\mathbf{x} + \mathbf{y})| = |\mathbf{x} + \mathbf{y}|$ és $|\mathbf{Q}(\mathbf{x} - \mathbf{y})| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, ezért minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vektorra

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}\mathbf{x} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{y} &= \frac{1}{4} (|\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{Q}\mathbf{y}|^2 - |\mathbf{Q}\mathbf{x} - \mathbf{Q}\mathbf{y}|^2) = \frac{1}{4} (|\mathbf{Q}(\mathbf{x} + \mathbf{y})|^2 - |\mathbf{Q}(\mathbf{x} - \mathbf{y})|^2) \\ &= \frac{1}{4} (|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \end{aligned}$$

3 \Rightarrow 1: $\mathbf{q}_i = \mathbf{Q}\mathbf{e}_i$ jelöléssel $\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j = \mathbf{Q}\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{Q}\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$.

Ortogonalis mátrix további tulajdonságai

- T**
1. Ha \mathbf{Q} valós ortogonalis mátrix, akkor $|\det(\mathbf{Q})| = 1$.
 2. Az $n \times n$ -es valós ortogonalis mátrixok $O(n)$ halmazából nem vezet ki a mátrixszorzás és invertálás művelete.
- B**
1. $\det(\mathbf{Q}^T) \det(\mathbf{Q}) = \det(\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}) = \det(\mathbf{I}) = 1$, $\det(\mathbf{Q}^T) = \det(\mathbf{Q}) \rightsquigarrow \det(\mathbf{Q}) = 1$ vagy $\det(\mathbf{Q}) = -1$.
 2. \mathbf{Q} ortogonalis $\rightsquigarrow \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$, ami ortogonalis
 \mathbf{Q}_1 és \mathbf{Q}_2 ortogonalis $\rightsquigarrow (\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2)^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_2^T \mathbf{Q}_1^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_2^T \mathbf{Q}_2 = \mathbf{I}$,
 $\rightsquigarrow \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2$ ortogonalis.
- m** A második állítás azt jelenti, hogy $O(n)$ elemei csoportot alkotnak a mátrixszorzásra nézve.
- m** Az $n \times n$ -es 1 determinánsú valós ortogonalis mátrixok halmazából sem vezet ki a mátrixszorzás és invertálás művelete, tehát e mátrixok is csoportot alkotnak, e csoport jele $SO(n)$.

Ortogonalis mátrixok

A 2- és 3-dimenziós tér ortogonalis
transzformációi

A sík ortogonális transzformációi

T Minden $O(2)$ -be eső ortogonális mátrix vagy egy forgatás, vagy egy egyenesre való tükrözés mátrixa.

B Ha $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ ortogonális, akkor
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0. \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow a^2 c^2 = b^2 d^2 \rightsquigarrow a^2(1 - d^2) = (1 - a^2)d^2 \rightsquigarrow a^2 = d^2, b^2 = c^2$$

$\rightsquigarrow d = a$ és $c = -b$ (ekkor $\det(\mathbf{Q}) = ad - bc = 1$), vagy

$d = -a$ és $c = b$ (ekkor $\det(\mathbf{Q}) = -1$).

$\alpha \in [0, 2\pi)$ egyértelmű, melyre $a = \cos \alpha$ és $b = \sin \alpha$.

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \text{ vagy } \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}$$

egy α szögű forgatás, és egy $\alpha/2$ szögű egyenesre való tükrözés mátrixa.

A forgástengely meghatározása

m $SO(3)$ minden eleme forgatás mátrixa, $O(3) - SO(3)$ eleme egy origóra való tükrözés és egy forgatás szorzata.

P Az 1 determinánsú ortogonális

$$\frac{1}{15} \begin{bmatrix} 14 & -5 & 2 \\ 5 & 10 & -10 \\ 2 & 10 & 11 \end{bmatrix}$$

mátrix milyen tengely körüli és mekkora szöggel való forgatás mátrixa?

M A forgástengely irányvektorára $\mathbf{Ax} = \mathbf{x}$, azaz $(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Innen a forgástengely:

$$\frac{1}{15} \begin{bmatrix} -1 & -5 & 2 \\ 5 & -5 & -10 \\ 2 & 10 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Forgásszög: egy \mathbf{v} -re merőleges vektort képével (pl. $\mathbf{w} = (0, 1, 0)$):

$$\frac{1}{15} \begin{bmatrix} 14 & -5 & 2 \\ 5 & 10 & -10 \\ 2 & 10 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \cos \alpha = \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{Aw}}{|\mathbf{w}| |\mathbf{Aw}|} = \frac{2}{3}.$$

Ortogonalis mátrixok

Primitív ortogonalis transzformációk

Givens-forgatás

- m Az n -dimenziós tér forgatásai és tükrözései közül kiválaszthatunk olyan egyszerű, ún. primitív ortogonális transzformációkat, melyek mátrixai szorzataként az összes ortogonális mátrix előállítható.
- D **Givens-forgatás**: két koordinátatengely által kifeszített síkban való forgatás a többi koordinátatengely helyben hagyása mellett.

Mátrixa

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \cos \alpha & \dots & -\sin \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \sin \alpha & \dots & \cos \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Givens-forgatás

P Keressük meg azt a forgatást, mely az (a, b) vektort az $(r, 0)$ -ba viszi, ahol $r^2 = a^2 + b^2$.

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\cos \alpha = a/r$$

$$\sin \alpha = -b/r$$

$$\begin{bmatrix} a/r & b/r \\ -b/r & a/r \end{bmatrix}$$

m Egy ilyen részmatrixot tartalmazó **G** Givens-forgatással elérhető, hogy egy **X** mátrix egy eleme helyén 0 legyen a **GX**-ben. (ritka mátrixok, párhuzamosítható számítások)

m $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ kiszámítása a túl- vagy alulcsordulás elkerülésével $a \geq b$ esetén: $r = |a| \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$

Householder-tükrözés

D **Householder-tükrözés:** hipersíkra való tükrözés. Matrixa (\mathbf{a} normálvektorral)

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{a}^T \mathbf{a}} \mathbf{a} \mathbf{a}^T$$

Á $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, akkor az $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^\perp$ hipersíkra való Householder-tükrözés az \mathbf{a} vektort \mathbf{b} -be viszi és viszont.

B A tükrözés mátrixa: $\mathbf{H} = \mathbf{I} - \frac{2}{(\mathbf{a}-\mathbf{b})^T(\mathbf{a}-\mathbf{b})} (\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{a} - \mathbf{b})^T$.

Mivel $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, ezért $\mathbf{a}^T \mathbf{a} = \mathbf{b}^T \mathbf{b}$, továbbá $\mathbf{a}^T \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \mathbf{a}$, így $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^T (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a}^T \mathbf{a} - \mathbf{a}^T \mathbf{b} - \mathbf{b}^T \mathbf{a} + \mathbf{b}^T \mathbf{b} = 2(\mathbf{a}^T \mathbf{a} - \mathbf{b}^T \mathbf{a}) = 2(\mathbf{a} - \mathbf{b})^T \mathbf{a}$.

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \mathbf{H} \mathbf{a} &= \mathbf{a} - \frac{2}{(\mathbf{a} - \mathbf{b})^T (\mathbf{a} - \mathbf{b})} (\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{a} - \mathbf{b})^T \mathbf{a} \\ &= \mathbf{a} - \frac{1}{(\mathbf{a} - \mathbf{b})^T \mathbf{a}} (\mathbf{a} - \mathbf{b})^T \mathbf{a} (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} - (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Mivel $\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{H}$, ezért $\mathbf{H} \mathbf{b} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{a}$.

Householder-tükrözés

- P** Határozzuk meg azt a \mathbf{H} mátrixot, mely az $(1, -1, -1, 1)$ vektort a $(2, 0, 0, 0)$ -ba viszi.
- M** Az $(1, -1, -1, 1) - (2, 0, 0, 0) = (-1, -1, -1, 1)$ vektorra merőleges hipersíkra való tükrözés mátrixa

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{a}^T \mathbf{a}} \mathbf{a} \mathbf{a}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Valóban, $\mathbf{H} \cdot (1, -1, -1, 1) = (2, 0, 0, 0)$.

A Givens-forgatás és a Householder-tükrözés alkalmazásai

- Givens-forgatás
 - mátrixelemek eliminálására pl. QR-felbontásnál
 - párhuzamosítható
 - ritka mátrixok esetén hatékonyabb a Householder-tükrözésnél
- Householder-tükrözés
 - QR-felbontás numerikus kiszámításához (a Gram–Schmidt-eljárás instabil)
 - szimmetrikus mátrix hozzá ortogonálisan hasonló tridiagonális alakjának kiszámításához
 - szimmetrikus mátrix Hessenberg (a subdiagonális alatt minden elem 0) alakra hozásánál

Ortogonalis mátrixok

QR-felbontás primitív ortogonalis
transzformációkkal

QR-felbontás Givens-forgatásokkal

P Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 8 \\ 3 & 10 & 6 \\ 0 & 12 & 13 \end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontását Givens-forgatások segítségével!

M az első és második sorokat és oszlopokat figyelve elimináljuk a második sor első elemét: $a = 4$, $b = 3$, tehát $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$,
 $\cos \alpha = 4/5$, $\sin \alpha = -3/5$.

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 & 0 \\ -3/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_1 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 12 & 13 \end{bmatrix}.$$

Következő lépésben a $\mathbf{Q}_1\mathbf{A}$ mátrix harmadik sorának második elemét elimináljuk:

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/13 & 12/13 \\ 0 & -12/13 & 5/13 \end{bmatrix}. \quad \mathbf{R} = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 0 & 13 & 12 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

és innen

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1)^{-1} = \mathbf{Q}_1^T\mathbf{Q}_2^T = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/13 & 36/65 \\ 3/5 & 4/13 & -48/65 \\ 0 & 12/13 & 5/13 \end{bmatrix},$$

amely mátrixokkal $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ valóban fennáll.

QR-felbontás Householder-tükrözésekkel

- Ötlet:

$$A = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \rightarrow Q_1 A = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{bmatrix} \rightarrow Q_2 Q_1 A = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

$$Q_1 = H_1$$

$$Q_2 = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & H_2 & \\ 0 & & & \end{array} \right]$$

$$\rightarrow Q_3 Q_2 Q_1 A = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

$$Q_3 = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & H_3 & \end{array} \right]$$

P Határozzuk meg az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & -7 \end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontását Householder-módszerrel!

QR-felbontás Householder-tükrözésekkel – megoldás

M Az $(1, 2, -2) \mapsto (3, 0, 0)$ transzformációhoz az

$$\mathbf{a} = (1, 2, -2) - (3, 0, 0) = (-2, 2, -2)$$

vektorral Householder-tükrözést végzünk:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1 &= \mathbf{I}_3 - \frac{2}{\mathbf{a}^T \mathbf{a}} \mathbf{a} \mathbf{a}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q}_1 \mathbf{A} &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

QR-felbontás Householder-tükrözésekkel

Ezután a $\mathbf{Q}_1\mathbf{A}$ mátrixból képzeletben elhagyva az első sort és oszlopot a $(4, 3) \mapsto (5, 0)$ transzformációhoz kell az $\mathbf{a} = (4, 3) - (5, 0) = (-1, 3)$ vektorral Householder-tükrözést végezni:

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{I}_2 - \frac{2}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_2 = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 4/5 & 3/5 \\ 0 & 3/5 & -4/5 \end{array} \right], \quad \mathbf{R} = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1)^{-1} = \mathbf{Q}_1^T\mathbf{Q}_2^T = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 14 \\ 10 & 10 & -5 \\ -10 & 11 & 2 \end{bmatrix}.$$

Komplex euklideszi tér

Mi lehet a skaláris szorzás \mathbb{C}^n -ben?

m A $\sum_i z_i w_i$ nem működik:

$$(1, i) \cdot (1, i) \stackrel{?}{=} 1 - 1 = 0$$

$$(i, i) \cdot (i, i) \stackrel{?}{=} -1 - 1 = -2$$

m Ötletadó kérdés: az 1-dimenziós térben mi az abszolút érték?

A $z = a + ib$ szám abszolút értékének négyzete $z\bar{z}$, és nem z^2 !

Eszerint $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ és a $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ vektorok skaláris szorzatának egy lehetséges definíciója

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2 + \dots + z_n \bar{w}_n, \text{ vagy}$$

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = \bar{z}_1 w_1 + \bar{z}_2 w_2 + \dots + \bar{z}_n w_n.$$

Komplex mátrix adjungáltja

D Az \mathbf{A} komplex mátrix **adjungáltján** (vagy **Hermite-féle transzponáltján**) elemenkénti konjugáltjának transzponáltját értjük. Az \mathbf{A} adjungáltját \mathbf{A}^* , vagy Hermite neve után \mathbf{A}^H jelöli, tehát $\mathbf{A}^H = \overline{\mathbf{A}}^T$.

m semmi köze a „klasszikus adjungálthoz”!

P $\begin{bmatrix} i & 1+i \\ -i & 2 \end{bmatrix}^H = \begin{bmatrix} -i & i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix}$, $[1 - i \ i]^H = \begin{bmatrix} 1+i \\ -i \end{bmatrix}$.

T **Az adjungált tulajdonságai** Legyenek \mathbf{A} és \mathbf{B} komplex mátrixok, c komplex szám. Ekkor

1. $(\mathbf{A}^H)^H = \mathbf{A}$,
2. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^H = \mathbf{A}^H + \mathbf{B}^H$,
3. $(c\mathbf{A})^H = \bar{c}\mathbf{A}^H$
4. $(\mathbf{AB})^H = \mathbf{B}^H\mathbf{A}^H$.

m A valós transzponálás kiterjesztése.

Skaláris szorzás definíciója

- D** **Komplex vektorok skaláris szorzata** A \mathbb{C}^n -beli $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ és $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ vektorok skaláris szorzatán a $\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} := \bar{z}_1 w_1 + \bar{z}_2 w_2 + \dots + \bar{z}_n w_n = \mathbf{z}^H \mathbf{w}$ komplex skalárt értjük.
- P** $(1, i)$ és (i, i) szorzatai:

$$(1, i) \cdot (1, i) = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = 1 - i^2 = 2,$$

$$(i, i) \cdot (i, i) = \begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix} = -i^2 - i^2 = 2,$$

$$(1, i) \cdot (i, i) = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix} = i - i^2 = 1 + i,$$

$$(i, i) \cdot (1, i) = \begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = -i - i^2 = 1 - i.$$

A komplex skaláris szorzás tulajdonságai

T Legyen $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$, és legyen $c \in \mathbb{C}$. Ekkor

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}$

2. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$,

3. $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \bar{c}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ és $\mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v}) = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$,

4. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} > 0$, ha $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, és $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$, ha $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

m Kiterjesztése a valós skaláris szorzatnak!

m A harmadik tulajdonságban felsoroltak bármelyike következik a másiktól az első alapján.

m Komplex vektor önmagával vett skaláris szorzata valós!

Komplex euklideszi tér

D ! $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$ egy vektortér, és $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan függvény, melyre bármely $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ vektorok és $c \in \mathbb{C}$ skalár esetén

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$$

konjugált szimmetria

$$\langle \mathbf{u}, c\mathbf{v} \rangle = c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

homogenitás a 2. változóban

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$$

additivitás

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0, \text{ ha } \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$$

pozitivitás

E $\langle \cdot, \cdot \rangle$ függvényt a \mathcal{V} -n értelmezett **komplex skaláris szorzásnak**, a skaláris szorzással ellátott \mathcal{V} vektorteret **komplex euklideszi térnek**, vagy \mathbb{C} fölötti euklideszi térnek nevezzük.

m Az első változóban a szorzás nem homogén, hisz

$$\langle cu, v \rangle = \overline{\langle v, cu \rangle} = \overline{c \langle v, u \rangle} = \bar{c} \overline{\langle v, u \rangle} = \bar{c} \langle u, v \rangle.$$

A komplex skaláris szorzás az első változóban nem lineáris, hanem ún. konjugált lineáris. Maga a komplex skaláris szorzás így nem bilineáris (hanem ún. szeszkvilineáris, vagy másféllineáris).

m A komplex skaláris szorzás definíciója a valós skaláris általánosítása, annak nem mond ellent.

Távolság és a merőleges vetítés komplex terekben

- D** **Komplex vektorok hossza, távolsága, merőlegessége** A komplex $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ vektor **hossza, abszolút értéke** vagy **normája** $\|\mathbf{u}\| = |\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$, **két vektor távolsága** megegyezik különbségük hosszával, azaz $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ vektorok esetén $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |\mathbf{u} - \mathbf{v}|$.
Két vektort **merőlegesnek** tekintünk, ha skaláris szorzatuk 0.
Két vektor szöge nem definiálható a szokásos módon.
- T** **Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség:** \mathcal{V} komplex euklideszi tér. Tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ vektorokra

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq |\mathbf{x}| |\mathbf{y}|.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha \mathbf{u} és \mathbf{v} lineárisan összefüggők, azaz ha egyik vektor a másik skalárszorosa.

B A valós bizonyítás mintájára. $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ esetén ✓

Ha $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, akkor

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \left| \mathbf{x} - \frac{\overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}}{|\mathbf{y}|^2} \mathbf{y} \right|^2 \\
 &= \left\langle \mathbf{x} - \frac{\overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}}{|\mathbf{y}|^2} \mathbf{y}, \mathbf{x} - \frac{\overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}}{|\mathbf{y}|^2} \mathbf{y} \right\rangle \\
 &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \frac{\overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}}{|\mathbf{y}|^2} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{|\mathbf{y}|^2} \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}}{|\mathbf{y}|^4} \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\
 &= |\mathbf{x}|^2 - \frac{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2}{|\mathbf{y}|^2}
 \end{aligned}$$

- Átrendezés után a képlet igazolva ✓

Unitér mátrixok

m Az ortogonális mátrixok komplex analogonjai az unitér mátrixok.

D **Unitér mátrix** Egy komplex négyzetes \mathbf{U} mátrix **unitér**, ha $\mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{I}$.

m Az ortogonális mátrixokhoz hasonlóan bizonyítható, hogy egy

$\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix pontosan akkor unitér, ha az alábbiak

bármelyike teljesül:

1. $\mathbf{U} \mathbf{U}^H = \mathbf{I}$,

2. $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^H$,

3. \mathbf{U} oszlopvektorai ortonormált bázist alkotnak a komplex skalárszorzásra nézve,

4. \mathbf{U} sorvektorai ortonormált bázist alkotnak a komplex skalárszorzásra nézve,

5. $|\mathbf{U}\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$ minden $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ vektorra,

6. $\mathbf{U}\mathbf{x} \cdot \mathbf{U}\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

Komplex mátrix kitüntetett alterei

m Komplex mátrixok szorzatában NEM sorvektor és oszlopvektor skaláris szorzata szerepel!

m $\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbb{C}^n = \mathcal{S}(\bar{\mathbf{A}}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A})$ $\mathbb{C}^m = \mathcal{O}(\bar{\mathbf{A}}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A}^T)$

T **Komplex mátrix kitüntetett alterei** Ha $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, akkor

1. $\mathcal{O}(\mathbf{A}^H) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\mathcal{O}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A}^H)$,
2. $\mathbb{C}^n = \mathcal{O}(\mathbf{A}^H) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\mathbb{C}^m = \mathcal{O}(\mathbf{A}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A}^H)$,

K Az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ négyzetes mátrixra ekvivalensek a következők:

1. $\mathcal{O}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A})$,
2. $\mathcal{O}(\mathbf{A}^H) = \mathcal{O}(\mathbf{A})$,
3. $\mathcal{N}(\mathbf{A}^H) = \mathcal{N}(\mathbf{A})$.

m Az invertálható mátrixok mind ilyenek, hisz a nulltér csak a nullvektorból áll.

Merőleges vetítés és tükrözés egy hipersíkra

m Az \mathbf{x} vektornak az \mathbf{e} egységvektor egyenesére eső merőleges vetülete: $\mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{x})$, \mathbf{x} rá merőleges összetevője:

$$\mathbf{x} - \mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}) = (\mathbf{I} - \mathbf{e}\mathbf{e}^H)\mathbf{x}$$

- Merőleges tükrözés mátrixa $\mathbf{I} - 2\mathbf{e}\mathbf{e}^H$

GS-ortogonalizáció komplex terekben

P Ortogonalizáljuk az $(i, 0, 0)$, (i, i, i) , $(i, i, 0)$ vektorokból álló vektorrendszert.

M $\mathbf{b}_1 = (i, 0, 0)$, a továbbiakban használjuk a

$\mathbf{b}_{i+1} = \mathbf{a}_{i+1} - \sum_{k=1}^i \frac{\mathbf{b}_k^H \mathbf{a}_{i+1}}{\mathbf{b}_k^H \mathbf{b}_k} \mathbf{b}_k$ képletet:

$$\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} i \\ i \\ i \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ i \\ i \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -i & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} i \\ i \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ i \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ i \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -i & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ i \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ i/2 \\ -i/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ i \end{bmatrix}, \mathbf{q}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ -i \end{bmatrix}$$

Önadjungált mátrixok

D Az A komplex mátrixot **önadjungált** vagy **Hermite-féle mátrixnak** nevezzük, ha

$$A^H = A.$$

m önadjungált mátrix főátlójában csak valósok állhatnak

m Minden valós szimmetrikus mátrix önadjungált,
a komplex szimmetrikus mátrixok pontosan akkor önadjungáltak,
ha minden elemük valós.

P Melyek önadjungáltak?

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 2 & 2-3i \\ 1-i & 2+3i & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} i & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2 \end{bmatrix}$$

Ferdén önadjungált mátrixok

D $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ **ferdén önadjungált**, ha

$$A = -A^H$$

P $\begin{bmatrix} 2i & 3-i \\ -3-i & 0 \end{bmatrix}$ ferdén önadjungált.

Á ferdén önadjungált mátrixok főátlójában tiszta imaginárius számok állnak (a 0 is annak tekintendő).

Á ha A ferdén önadjungált, akkor iA és $-iA$ önadjungált.

Á Minden komplex négyzetes mátrix egyértelműen előáll egy önadjungált és egy ferdén önadjungált mátrix összegeként.

B $A = B + C$, ahol $B = \frac{1}{2}(A + A^H)$, $C = \frac{1}{2}(A - A^H)$ és B önadjungált, C ferdén önadjungált.

Normális mátrixok

D Az adjungáltjával fölcserélhető mátrixokat **normális** mátrixoknak nevezzük:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^H = \mathbf{A}^H\mathbf{A}$$

Á Minden valós szimmetrikus, ferdén szimmetrikus és ortogonális mátrix normális. Minden komplex önadjungált, ferdén önadjungált és unitér mátrix normális.

m Van olyan mátrix, mely nem esik a fent felsorolt osztályokba, de normális:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}\mathbf{A}^H = \mathbf{A}^H\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

F $\forall \mathbf{A} \in \mathbb{C}^n$ mátrixra $\mathcal{N}(\mathbf{A}^H \mathbf{A}) = \mathcal{N}(\mathbf{A})$ és $\mathcal{O}(\mathbf{A}^H \mathbf{A}) = \mathcal{O}(\mathbf{A}^H)$.

Á $\{\text{valós szimmetrikus}\} \subset \{\text{önadjungált}\} \subset \{\text{normális}\} \subset \{\text{nulltér} \perp \text{oszloptér}\}$

B $A \subseteq$ relációk közül csak az utolsó nem trivi: Tudjuk, hogy $\mathcal{O}(\mathbf{A}) = \mathcal{O}(\mathbf{A}\mathbf{A}^H) = \mathcal{O}(\mathbf{A}^H \mathbf{A}) = \mathcal{O}(\mathbf{A}^H)$, ami ekvivalens azzal, hogy $\mathcal{O}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A})$.

Azt, hogy mindegyik tartalmazás valódi, példákkal igazoljuk:

$\begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$ önadjungált, de nem szimmetrikus

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (ferdén szimmetrikus) nem önadjungált, de normális

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ nem normális, de invertálható \rightsquigarrow nulltér \perp oszloptér

Feladatok

- F Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ önadjungált és $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitér mátrixok, akkor $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}$ önadjungált!
- F Legyen $\mathbf{S} \in M_n[\mathbb{R}]$ szimmetrikus, $\mathbf{H} \in M_n[\mathbb{C}]$ önadjungált mátrix. Mutassuk meg, hogy minden $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, ill. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ vektorra $(\mathbf{S}\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{S}\mathbf{y})$, ill. $(\mathbf{H}\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{H}\mathbf{y})$!
- F Mutassuk meg, hogy az $H : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{H}\mathbf{x}$ leképezés egy tetszőleges \mathcal{B} bázisra vonatkozó $\mathbf{H}_{\mathcal{B}}$ mátrixa nem szükségképpen önadjungált (adjunk egy egyszerű példát), de az $\mathbf{H}\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{H}\mathbf{y}$ egyenlőség a vektorok e bázisbeli koordinátás alakját használva is igazak maradnak!