1. Mely mátrixok hasonlóak ortogonálisan egy felsőháromszög-mátrixhoz az alábbiak közül?

$$\begin{bmatrix}1&2&5\\2&4&3\\5&3&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}5&0\\3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&3\\-3&0\end{bmatrix},$$

Megoldás. IIH: Az első szimmetrikus, így ortogonálisan diagonalizálható (a diagonális pedig felső háromszög), a második minden sajátértéke valós (5, 2), tehát a Schurr-tétel szerint ortogonálisan hasonló egy felsőháromszög-mátrixhoz. A harmadik sajátértékei komplexek ($\pm 3i$), így csak unitéren hasonló egy komplex felsőháromszög-mátrixhoz.

2. Számítsuk ki az alábbi mátrix spektrálfelbontását, majd adjuk meg a kétszeres multiplicitású λ sajátértékhez tartozó spektrálvetítő λ-szorosát!

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}c-1&1&1\\-1&c+1&1\\-1&1&c+1\end{bmatrix}$$

Megoldás. A fönti alakú mátrixoknak épp $\lambda=c$ egy kétszeres multiplicitású sajátértéke, a másik $\lambda_2=c+1$, ui. $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=-(\lambda-c)^2(\lambda-c-1)$. A

$$\begin{aligned}c\mathbf{P}_1+(c+1)\mathbf{P}_2&=\mathbf{A}\\ \mathbf{P}_1+\qquad\mathbf{P}_2&=\mathbf{I}\end{aligned}$$

megoldása

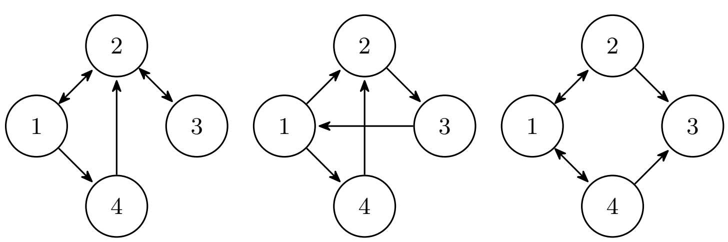
$$\mathbf{P}_1=(c+1)\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{bmatrix}$$

ennek c-szerese a válasz.

3. Az alábbi mátrixok között pontosan egy imprimitív irreducibilis, és egy reducibilis van. Rajzoljuk föl a három mátrix gráfját, csúcsait a sor/oszlop sorszámával indexeljük. Adjuk meg először a reducibilitást, majd az imprimitív irreducibilitását igazoló csúcsokból alkotott többjegyű számot.

$$\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&1&0\end{bmatrix}$$

Megoldás. A három gráf



Az első mátrix primitív, mert pontosan 5 lépésben el lehet jutni bármelyik pontból bármelyikbe (a mátrix 5-dik hatványa pozitív). A második mátrix irreducibilitását igazolja az $1\to4\to2\to3\to1$ irányított Hamilton-kör. A harmadik mátrix reducibilitását igazolja, hogy a $\{3\}$ halmazból nem lehet eljutni az $\{1,2,4\}$ halmazba. A helyes válasz: 124, 14231.

4. Határozzuk meg azt az Hermite-polinomot, melybe való helyettesítéssel ki tudnánk számolni az A^n mátrixot, ha tudjuk hogy az A egy $m\times m$ méretű mátrix és a minimálpolinomja $\mu(x)=(x-y)^2(x-z)$.

Megoldás. A mátrix mérete érdektelen. A minimálpolinom harmadfokú, így az Hermite-polinomot $p(x)=ax^2+bx+c$ alakban keressük. Legyen általánosan $f(x)$ a kiértékelendő függvény. Ekkor

$$\begin{aligned}f(y)&=ay^2+by+c\\ f(z)&=az^2+bz+c\\ f'(y)&=2ay+b\end{aligned}$$

Az első egyenletet kivonva a másodikból, a harmadikból kifejezve b-t kapjuk, hogy

$$a=\frac{f(z)-f(y)-f'(y)(z-y)}{(z-y)^2},\ b=f'(y)-2ya,\ c=f(z)-az^2-bz.$$

A feladatbeli kérdésre az $f(x)=x^n$, $f'(x)=nx^{n-1}$ és a konkrét számok behelyettesítése adja a választ.

5. Mennyi az

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}24&-2\\-12&-24\end{bmatrix}$$

mátrix szinguláris értékeinek négyzetösszege? Adjuk meg a szinguláris felbontás segítségével az $\mathbf{A}$ legjobb 1-rangú közelítését!

Megoldás. A szinguláris értékek négyzetösszege = az elemek négyzetösszegével = 1300, de ez egyszerűbben megkapható az SVD-ből:

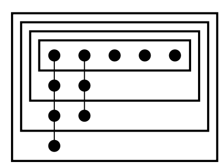
$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3/5&4/5\\-4/5&3/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}30&0\\0&20\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4/5&3/5\\3/5&-4/5\end{bmatrix}$$

A legkisebb 1-rangú közelítés

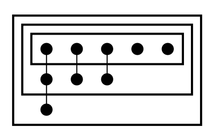
$$\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix}3/5\\-4/5\end{bmatrix}[30]\,[4/5\ 3/5]=\begin{bmatrix}72/5&54/5\\-96/5&-72/5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14.4&10.8\\-19.2&-14.4\end{bmatrix}$$

6. Egy 19×19 méretű A mátrixnak két sajátértéke van: λ_1 és λ_2. Az $\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 14, 12, 10, 9, a $\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 14, 11, 10. Határozzuk meg $\mathbf{A}$ Jordan-féle normálalakját!

Megoldás. A két sajátértékhez tartozó rajz és táblázat:



k	0		1		2		3		4
rang	19		14		12		10		9
d_k		5		2		2		1	0
n_i			3		0		1		1



k	0		1		2		3
rang	19		14		11		10
d_k		5		3		1	0
n_i			2		2		1

így a megoldások 1,1,0,3 és 1,2,2.

7. Legyen $\mathbf{A}$ egy négyzetes mátrix. Mely állítások igazak az alábbiak közül?

1. $\mathbf{A}$ bármely Jordan-láncának vektorai által kifeszített altér invariáns altere A-nak.
2. $\mathbf{A}$ egy λ sajátértékéhez tartozó összes Jordan-láncának vektorai által kifeszített altér invariáns altere A-nak.
3. Bármely négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix hasonló egy Jordan-blokkokból álló blokkdiagonális Jordan-mátrixhoz.

Megoldás. IIH: 1. egy Jordan-lánc vektorait $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}$ önmagukba viszi, így az általuk kifeszített $\mathcal{V}$ altér $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}$ invariáns altere, de ha $\mathbf{x}\in\mathcal{V}$, akkor $\mathbf{Ax}\in\mathcal{V}$ is igaz, mert $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{Ax}-\lambda\mathbf{x}\in\mathcal{V}$. 2. igaz az előző miatt. 3. ez csak akkor igaz, ha a karakterisztikus polinom lineáris tényezőkre bomlik.

8. *(a)* Mennyi az $(1,2i,7,-7)$ vektor 1-normája?

(b) Egy valós négyzetes $\mathbf{A}$ mátrixban minden sorra kiszámítjuk az elemek abszolút értékeinek összegét. Ezek maximumát jelölje m. Vegyük az összes olyan valós $\mathbf{x}$ vektort, melyben a legnagyobb abszolút értékű koordináta 1 vagy -1. Tekintsük az összes ilyen $\mathbf{x}$ vektorra az $A\mathbf{x}$ vektor maximális abszolút értékű koordinátáját, majd jelölje ezek maximumát M. Igaz-e, hogy $m=M$?

(b) Jelölje c az $\mathbf{A}$ elemei abszolút értékének négyzetösszegéből vont négyzetgyököt. Igaz-e, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix 2-normája c.

Megoldás. *(a)* $1 + |\mathrm{i}| + |7| + |-7| = 17$ *(b)* Igaz, ez épp az indukált ∞-norma kiszámítási módja és definíciója. *(c)* Hamis, ez a Frobenius-norma.

9. Mely állítások igazak az alábbiak közül?

1. Ha egy 20×20-es mátrixban van 8 sor és 13 oszlop, melyek kereszteződésében minden elem 0, akkor a mátrix determinánsa is 0.
2. Ha egy nemnegatív mátrixnak több sajátértéke is van a spektrálkörén, akkor reducibilis.
3. Egy imprimitív irreducibilis sztochasztikus A mátrix spektruma lehet $\{0, i, -i, 1\}$.

Megoldás. IHH: 1. A Frobenius–Kőnig-tétel szerint minden kígyóban van 0, így a determináns értéke 0. 2. lehet imprimitív irreducibilis is. 3. Az imprimitív reducibilis mátrix spektrálkörön lévő sajátértékei kiadják az 1 összes k-adik egységgyökét, tehát itt pl. a -1 hiányzik a spektrálkörről.

10. *(a)* Az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}$$

mátrixnak van a standard egységvektorokból álló Jordan-bázisa. Határozzuk meg, és írjuk fel a belőlük képzett mátrixot úgy, ahogy arra a Jordan-felbontásban szükség lesz! *(b)* A mátrix Jordan-normálalakjában szereplő $\mathbf{J}$ mátrixból írjuk fel az e^{tJ} mátrixot. *(c)* Ha a kérdés első részében meghatározott mátrixot $\mathbf{C}$ jelöli, a második lépésben meghatározott $\exp(t\mathbf{J})$ mátrixot $\mathbf{E}$, akkor hogyan fejezhető ki az $exp(tA)$ mátrix C és E segítségével?

Megoldás. Mivel

$$\mathbf{A} - a\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ (\mathbf{A} - a\mathbf{I})^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

és $(\mathbf{A} - a\mathbf{I})^2\mathbf{e}_2 \neq \mathbf{0}$, ezért $\mathbf{e}_2$-ből indulva a Jordan-lánc és belőle képzett mátrix:

$$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-a\mathbf{I}} \mathbf{e}_3 \xleftarrow{\mathbf{A}-a\mathbf{I}} \mathbf{e}_1 \xleftarrow{\mathbf{A}-a\mathbf{I}} \mathbf{e}_2 \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Innen a $\mathbf{J}$ Jordan-mátrix és és $\exp(t\mathbf{J})$:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad \exp(t\mathbf{J}) = \begin{bmatrix} \exp(at) & t\exp(at) & \frac{t^2}{2}\exp(at) \\ 0 & \exp(at) & t\exp(at) \\ 0 & 0 & \exp(at) \end{bmatrix}$$

Innen $\exp(t\mathbf{A}) = \mathbf{C}\exp(t\mathbf{J})\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{CEC}^{-1}$.