

1. Határozzuk meg annak a lineáris leképezésnek a mátrixát, mely az $x + y + z = 0$ egyenletű síkra vetíti az $(1, 0, 0)$ vektor által kifeszített egyenes mentén. Ezután adjuk meg a $x + y + z = 0$ egyenletű sík mentén az x -tengelyre vetítő lineáris leképezés mátrixát! (6 pont)

Eredmény. $[0; -1; -1 | 0; 1; 0 | 0; 0; 1] \quad [1; 1; 1 | 0; 0; 0 | 0; 0; 0]$

Megoldás. Az egyenes mentén a síkra való $\mathbf{P}$ vetítőmátrix a síkot, így annak két vektorát önmagába viszi, az egyenest kifeszítő vektort a $\mathbf{0}$ -ba:

$$\mathbf{P} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A másik vetítés ugyanezzel az elvvel is számolható, de egyszerűbb a $\mathbf{I} - \mathbf{P}$ képlettel:

$$\hat{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Tekintsük azt az F leképezést, mely az $\mathbb{R}^4$ bázisvektorait ciklikusan megcseréli a következő sorrendben:

$$\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_3 \mapsto \mathbf{e}_4 \mapsto \mathbf{e}_1.$$

Írjuk fel ennek a leképezésnek a mátrixát a

$$\mathcal{B} = \{2\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1, 4\mathbf{e}_3\}$$

bázisban!

(5 pont)

Eredmény. $[0; 0; 1/2; 0 | 0; 0; 0; 4 | 0; 1; 0; 0 | 1/2; 0; 0; 0]$

Megoldás. A leképezés az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ vektorok képeiből álló mátrix, azaz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A $\mathcal{B} = \{2\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1, 4\mathbf{e}_3\}$ bázisra való áttérés mátrixa

$$\mathbf{T}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Így a mátrix $\mathcal{E}$ bázisban

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Keressük azt a másodfokú polinomot, mely a legkisebb négyzetek elve szerint a legjobban illeszkedik az (x, y) párokra, ahol

$$\begin{array}{c|cccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 \\ y & 0 & 0 & 0 & 20 \end{array}$$

Mielőtt azonban kiszámolnánk, válasszuk az igaz állításokat az alábbiak közül!

Eredmény. IGAZ: A feladat megoldható a normálegyenlet felírásával, melynek csak egyetlen megoldása lesz.

IGAZ: A feladat megoldható pszeudo inverzzel!

HAMIS: A polinom együtthatóira mint ismeretlenekre fölírtnégy egyenletből álló egyenletrendszer sortérbe eső egyetlen megoldása adja a választ!

A legjobban illeszkedő polinom: $5x^2 - 9x + 1$ (1+5 pont)

Megoldás. Az optimális megoldást keressük a

$$\mathbf{V}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \text{ azaz } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix}$$

egyenletrendszerhez. Ennek az egyenletrendszernek nincs megoldása, mert ellentmondásos (ami látszik a három egy egyenesbe eső pontról számolás nélkül is). Normálegyenlettel és pszeudo inverzzel is számolható! Itt érdemes géppel számolni! Az általa adott szám az egyetlen megoldás, mivel $\mathbf{V}$ Vandermonde-mátrix, így teljes oszloprangú.

```
>>> pinv(V) * [0; 0; 0; 20]
ans =
    1.00000
   -9.00000
    5.00000
```

Másik megoldás a normálegyenletből:

```
>>> (V' * V) \ V' * [0; 0; 0; 20]
ans =
    1.00000
   -9.00000
    5.00000
```

Tehát $1 - 9x + 5x^2$ a legjobban illeszkedő polinom.

4. Tekintsük a következő egyenletrendszert!

$$4x + 6y - 2z + 3w = 3$$

$$6x + 8y - 3z + 4w = 2$$

$$4x + 8y - 2z + 4w = 8$$

Keressük az összes megoldást a sortérbe eső megoldás segítségével. Mely állítások igazak a következők közül? (4-2-0 pont)

Eredmény. IGAZ: A sortérbe eső megoldáshoz az egyenletrendszert ki kell egészíteni a következő egyenletekkel:

$$x + 2z = 0$$

$$y - 2w = 0$$

IGAZ: Az összes megoldás

$$(x, y, z, w) = (-2.4, 2, 1.2, 1) + (0.5, 0, 1, 0)s + (0, 0.5, 0, -1)t$$

HAMIS: A sortérbe eső megoldáshoz az egyenletrendszert ki kell egészíteni a következő egyenletekkel:

$$0.5x - z = 0$$

$$0.5y + w = 0$$

HAMIS: Az összes megoldás

$$(x, y, z, w) = (-2.4, 2, 1.2, 1) + (0.5, 0, -1, 0)s + (0, 0.5, 0, 1)t$$

Megoldás. A redukált lépcsős alak:

$$\text{rref} \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 6 & -2 & 3 & 3 \\ 6 & 8 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & -2 & 4 & 8 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{array} \right]$$

A homogén megoldások tere, azaz a nulltér: $(x, y, z, w) = (1, 0, 1/2, 0)t + (0, 1, 0, -1/2)s$, ahol bármely két vektor megfelel, mely ugyanezt a teret feszíti ki! (Trükkös kérdés az lett volna, ha e vektorok valamilyen más lineáris kombinációit adjuk meg, de itt csak skalárszoros szerepelt: $(0.5, 0, 1, 0)s + (0, 0.5, 0, -1)t$.) Az összes megoldáshoz a sortérbe esőnek ezekre kell merőlegesnek lennie, így például a következő két egyenlet hozzávételével megoldható az egyenletrendszer:

$$\begin{array}{rcl} x + 2z & = & 0 \\ y & - & 2w = 0 \end{array}$$

Így a megoldás

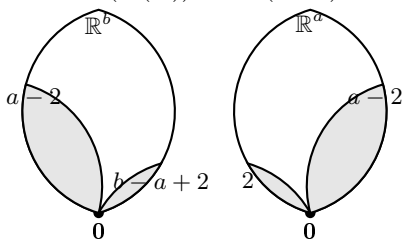
$$\text{rref} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2.4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2.0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1.0 \end{array} \right]$$

(A rref után a pszeudoinverzrel is lehetett számolni, ami gyorsabban ad eredményt.)

5. Egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{a \times b}$ mátrixra $\dim(\mathcal{N}(\mathbf{A}^T)) = 2$. Adjuk meg $\dim(\mathcal{N}(\mathbf{A}))$ értékét! (3 pont)

Eredmény. $b - a + 2$

Megoldás. $\dim(\mathcal{N}(\mathbf{A}^T)) = 2 \rightsquigarrow \dim(\mathcal{O}(\mathbf{A})) = a - 2 \rightsquigarrow \dim(\mathcal{S}(\mathbf{A})) = a - 2 \rightsquigarrow \dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = b - (a - 2) = b - a + 2$



6. Jelöljük meg mindegyik igaz állítást! (0 pont)

Eredmény. IGAZ: Az $1, 1 + 2x, 1 + 2x + 3x^2, \dots$ polinomok bázist alkotnak a polinomok $\mathbb{R}[x]$ vektorterében.

IGAZ: Az összes 0-1-sorozat nem alkot generátorrendszert a sorozatok terében, mert például az $1, 2, 3, 4, \dots$ sorozat nem áll elő lineáris kombinációjukként.

HAMIS: Az $1, x, x^2, \dots$ polinomok bázist alkotnak a hatványsorok $\mathbb{R}[[x]]$ vektorterében.

HAMIS: Azok a 0-1-sorozatok, melyekben egyetlen helyen áll egy 1-es, a többi elem 0, bázist alkotnak a sorozatok terében, mert minden sorozat előáll ezek lineáris kombinációjaként.

Megoldás. A sorozatok nem állnak elő az olyan sorozatok lineáris kombinációjaként, amelyekben csak 1 nulla van, mert ahhoz végtelen sok tagot kéne összeadni, a lineáris kombinációban meg csak véges sokat lehet. Ugyanez az oka a másik hamisnak is.

7. Jelöljük meg minden igaz állítást az alábbiak közül! (3 pont)

Eredmény. IGAZ: Az $\mathbb{R}$ vektortéren egy skaláris szorzás a számok egyszerű szorzása, de az is ha a számok szorzatát még egy pozitív c skalárral is megszorozzuk, azaz ha $\langle x, y \rangle = cxy$, ahol $x, y \in \mathbb{R}$.

IGAZ: Az $\mathbb{R}^2$ téren skaláris szorzást definiál

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

HAMIS: Az $\mathbb{R}^2$ téren skaláris szorzást definiál

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + 4x_1 y_2 + x_2 y_2.$$

Megoldás. A skaláris szorzás definíciója ellenőrizendő. A szimmetria, a homogenitás és additivitás mindegyikre igaz a mátrixszorzás elemi tulajdonságai miatt, ezért csak az utolsót kell ellenőrizni ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$):

$$cx^2 > 0, \text{ ha } x \neq 0.$$

$$4x^2 + 2xy + 3y^2 = (x^2 + 2xy + y^2) + 3x^2 + 2y^2 > 0, \text{ ha } (x, y) \neq (0, 0).$$

$$x_1^2 + 4x_1 x_2 + x_2^2 \leq 0, \text{ pl. ha } (x_1, x_2) = (-1, 1).$$

8. Adjuk meg a $(2, 12, 5, 3)$ vektort a $(2, 13, 0, 3)$ vektorba vivő Givens-forgatás mátrixát! (3 pont)

Eredmény. $[1; 0; 0; 0 \mid 0; 12/13; 5/13; 0 \mid 0; -5/13; 12/13; 0 \mid 0; 0; 0; 1]$

Megoldás. A $(12, 5)$ forgatása a $(13, 0)$ -ba:

$$\begin{bmatrix} 12/13 & 5/13 \\ -5/13 & 12/13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 0 \end{bmatrix},$$

így a válasz a definíció alapján

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12/13 & 5/13 & 0 \\ 0 & -5/13 & 12/13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

9. Az $\{x - 1/3, x - 3\}$ függvények által generált euklideszi térben keressünk ortonormált bázist Gram-Schmidt-ortogonalizációval! Az euklideszi térben a skaláris szorzást a

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 fg$$

integrál adja meg. Az ortonormált bázis első normált elemét az első mezőbe, a másodikat a másodikba írjuk, pl. így: $5x-3$ vagy $\sqrt{2}x + \sqrt{6}$. (6 pont)

Eredmény. $3x-1, \sqrt{3}x - \sqrt{3}(3)$

Megoldás. Gram-Schmidt-ortogonalizáció, majd normálás (kezdhetnénk először az első fv. normálásával is), $a_1(x) = x - 1/3$, $a_2(x) = x - 3$:

$$b_1(x) = x - 1/3$$

$$b_2(x) = a_2(x) - \frac{\langle b_1(x), a_2(x) \rangle}{\langle b_1(x), b_1(x) \rangle} b_1(x)$$

$$= x - 3 - \frac{\int_0^1 (x - \frac{1}{3})(x - 3) dx}{\int_0^1 (x - \frac{1}{3})^2 dx} (x - \frac{1}{3})$$

$$= x - 3 - \frac{-1/3}{1/9} (x - \frac{1}{3}) = x - 3 + 3(x - \frac{1}{3})$$

$$= 4x - 4$$

Ortonormáltsághoz normálás:

$$f_1(x) = \frac{b_1(x)}{\sqrt{\int_0^1 b_1^2(x) dx}} = \frac{x - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 3x - 1$$

$$f_2(x) = \frac{b_2(x)}{\sqrt{\int_0^1 b_2^2(x) dx}} = \frac{4x - 4}{\frac{4}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$$

10. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Jelöljük meg minden igaz állítást! (4 pont)

Eredmény. IGAZ: $\mathbf{A}^+ \mathbf{A}$ az $\mathcal{O}(\mathbf{A}^H)$ térre való merőleges vetítés mátrixa.

IGAZ: $\mathbf{B}$ pontosan akkor merőleges vetítés mátrixa, ha $\mathbf{B}^2 = \mathbf{B}$ és $\mathbf{B}$ szimmetrikus.

IGAZ: $\mathbf{A}^+ \mathbf{A}$ önadjungált.

IGAZ: $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$ szimmetrikus.

HAMIS: $\mathbf{A}^+ \mathbf{A}$ az $\mathcal{O}(\mathbf{A})$ térre való merőleges vetítés mátrixa.

Megoldás. Az első és utolsó állítás egymás ellentettje, de az utolsó semmiképp nem lehet jó, mivel az nem $\mathbb{C}^n$ -be, hanem $\mathbb{C}^m$ -be képez.

A többi állítás tétel volt: egy mátrix mikor merőleges vetítés mátrixa; a Moore-Penrose-tétel szerint $\mathbf{A}^+ \mathbf{A}$ önadjungált; $(\mathbf{B}^T \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{B}$, tehát szimmetrikus.