BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

Haladó lineáris algebra

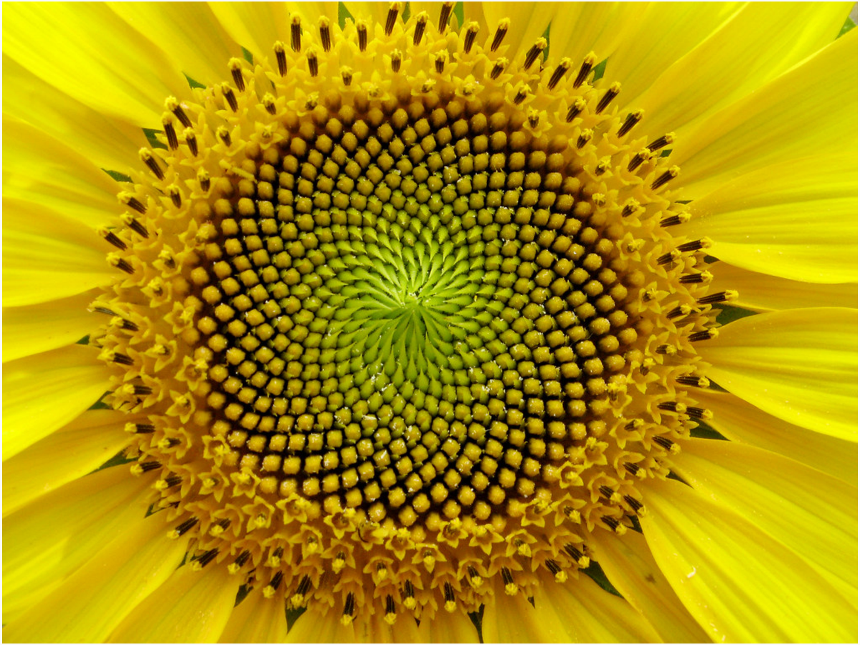
BMETE90MX54 (FELSŐBB MATEMATIKA VILLAMOSMÉRNÖKÖKNEK)

Néhány alkalmazás

KÓDELMÉLET, LEONTIEF-MODELL

Wettl Ferenc

ALGEBRA TANSZÉK



Tartalomjegyzék

Fisher-egyenlőtlenség

m Statisztikai vizsgálatok tervezésében merültek fel a következőkben vizsgált 2-struktúrák.

D 2-struktúra: L! $\lambda \in \mathbb{N}^+$. A (V, B) hipergráfot 2-struktúrának nevezzük, ha V bármely két pontja pontosan $\lambda > 0$ számú élre illeszkedik, és van legalább egy nem triviális él, azaz amelynek legalább 2 pontja van, de nem tartalmazza V összes pontját. (A 2-struktúra éleit blokkoknak is nevezik.)

T Fisher-egyenlőtlenség Bármely 2-struktúra blokkjainak száma legalább annyi, mint pontjaié, azaz $|B| \geqslant |V|$.

B L! $|V| = v$, $|B| = b$, a 2-struktúra pontjait jelöljék az 1-től v-ig terjedő egészek, a j-edik blokkot B_j $(j = 1, 2, \ldots, b)$, e hipergráf illeszkedési mátrixát $\mathbf{M}$, azaz $m_{ij} = 1$, ha $i \in B_j$, egyébként $m_{ij} = 0$.

Ekkor

$$\mathsf{A} = \mathsf{MM}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} r_1 & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & r_2 & \dots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \dots & r_v \end{bmatrix} = \lambda \mathsf{J}_v + \operatorname{diag}(r_1 - \lambda, r_2 - \lambda, \dots, r_v - \lambda),$$

ahol J_v a csupa 1-esből álló $v \times v$-es mátrix, és r_i az i pont foka.

- J_v pozitív szemidefinit, mert szimmetrikus és $\forall\, \mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^v$:

$$\mathbf{x}^\mathsf{T} \mathsf{J}_v \mathbf{x} = \sum_{i,j} x_i x_j = \Big(\sum_i x_i\Big)^2 \geqslant 0.$$

- $\operatorname{diag}(r_1 - \lambda, r_2 - \lambda, \dots, r_v - \lambda)$ pozitív definit, mert $r_i > \lambda$, ugyanis $r_i = \lambda$ esetén bármely $j \neq i$ pontra az i-t tartalmazó blokkok tartalmaznák j-t is, vagyis nem létezne nem triviális blokk.
- pozitív definit + pozitív szemidefinit = pozitív definit $\rightsquigarrow$ MM^T poz.def. $\rightsquigarrow$ invertálható $\rightsquigarrow$ $\mathrm{r}(\mathsf{MM}^\mathsf{T}) = v$ $\rightsquigarrow$ szorzatmátrix rangjára vonatkozó tételből $\mathrm{r}(\mathsf{M}) = v$, de $\mathsf{M} \in \mathbb{R}^{v \times b}$ $\rightsquigarrow$ $b \geqslant v$.

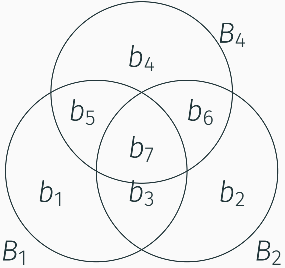
Kódelmélet

Néhány példa

- Ismétlő kód: $a \in \mathcal{X} \mapsto aa\dots a \in \mathcal{X}^n$. Legföljebb $n-1$ hibát jelez, és $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ hibát javít.
- Paritásellenőrző kód, nullösszegű kód. $(b_1, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{F}_2^{n-1} \mapsto (b_1, \dots, b_{n-1}, b_1 + \dots + b_{n-1}) \in \mathbb{F}_2^n$ (utolsó bit a paritásbit), egy hibát jelez (!páratlan sokat). Nullösszegű kód: $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{F}_q^{n-1} \mapsto (a_1, \dots, a_{n-1}, -\sum_{i=1}^{n-1} a_i) \in \mathbb{F}_q^n$.

D Egy $c \in \mathcal{C}$ kódszó Hamming súlyán (weight) a nemnulla komponenseinek $\mathrm{wt}(c)$ számát értjük, azaz $\mathrm{wt}(c) = |\{i : c_i \neq 0,\ i = 1, \dots, n\}|$. Két kódszó Hamming-távolsága a különbségük Hamming-súlya. A $\mathcal{C}$ kód minimális súlya a legkisebb Hamming súlyú nemnulla kódszó w súlya, azaz $w = \min_{c \in \mathcal{C}, c \neq 0} \mathrm{wt}(c)$.

- $H_{3,2}$ vagy $[7,4,3]_2$ Hamming-kód.
  $\mathbb{F}_2^4 \to \mathbb{F}_2^7 : (b_3, b_5, b_6, b_7) \mapsto (b_1, \ldots, b_7)$, ahol $b_1 = b_3 + b_5 + b_7$, $b_2 = b_3 + b_6 + b_7$, $b_4 = b_5 + b_6 + b_7$.



$(b_1, \ldots, b_7)$ kódszó $\iff$ B_j $(j = 1, 2, 4)$ halmazok mindegyikében páros sok bit egyes. 1-hibajavító, 2-hiba jelző, mert bármely két kódszó Hamming-távolsága legalább 3.

- Ternér $[4,2,3]_3$ Hamming-kód.
  $\mathbb{F}_3^2 \to \mathbb{F}_3^4 : (a, b) \mapsto (a, b, a + b, a + 2b)$. Bármely két kódszó Hamming-távolsága legalább 3.
- Személyi szám 11-jegyű szám: neme s_1, születési dátuma $(s_2 \ldots s_7)$, véletlen 3-jegyű szám $(s_8 s_9 s_{10})$, ellenőrző szám $s_{11} = \sum_{i=1}^{10} i s_i \bmod 11$. $s_8 s_9 s_{10}$ olyan, hogy $s_{11} \neq 10$. E kód 1-hibajelző, és jelzi két szomszédos szám fölcserélését.

P 7 halálraítélt körben ül, mindegyikük fején egy véletlenül kiválasztott piros vagy fekete sapka. Mindenki látja a többiek sapkáját, de senki se látja a sajátját. Semmi módon nem kommunikálhatnak egymással. Egy idő után egyszerre mindegyiküknek tippelnie kell a saját sapkája színére. Három válasz lehetséges: „nem tudom”, „fekete”, „piros”. Ha senki nem találja el, vagy csak egy is akad, aki téved, mind meghalnak, egyébként mind megmenekülnek. Tudunk-e számukra olyan eljárást javasolni, ami 1/2-nél nagyobb valószínűséggel megmenekíti őket. Mi a legnagyobb valószínűség, amit el tudunk érni?

Kódelmélet

Lineáris kód

Generátormátrix

D Az $\mathbb{F}_q$ test fölött értelmezett $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_q^n$ kódot lineáris kódnak nevezzük, ha $\mathcal{C}$ az $\mathbb{F}_q^n$ vektortér egy k-dimenziós altere. (Jel.: $[n, k]_q$, vagy $[n, k, d]_q$)

Á Egy lineáris $\mathcal{C}$ kód kódtávolsága megegyezik minimális súlyával.

D Legyen g_1, g_2,..., g_k a $\mathcal{C}$ egy bázisa. Egy tetszőleges $x \in \mathbb{F}_q^k$ vektor (üzenet) $c \in \mathcal{C}$ kódja legyen $c = x_1g_1 + x_2g_2 + \cdots + x_kg_k$. Ez egy egyszerű mátrixszorzással is előállítható:

$$c = xG,$$

ahol a $k \times n$-es G mátrix – az úgynevezett generátormátrix – sorvektorai $\mathcal{C}$ bázisának elemei.

$$[1\,1\,\ldots\,1], \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ellenőrző mátrix

D A $\mathcal{C}$ kód duálisán a

$$\mathcal{C}^\perp = \{\, v \in \mathbb{F}_q^n : v \cdot c = 0 \text{ minden } c \in \mathcal{C} \text{ kódszóra} \,\}$$

kódot értjük, mely egy lineáris kód. A $\mathcal{C}^\perp$ kód H generátormátrixát a $\mathcal{C}$ kód ellenőrző mátrixának nevezzük.

P A nullösszegű és az ismétlő kód egymás duálisa.

T Ha $\mathcal{C}$ egy lineáris $[n, k]$-kód, akkor

(1) $\mathcal{C}^\perp = \{\, v \in \mathbb{F}_q^n : vG^\top = 0 \,\}$,

(2) $\mathcal{C}^\perp$ egy $[n, n-k]$-kód,

(3) $\mathcal{C}^{\perp\perp} := (\mathcal{C}^\perp)^\perp = \mathcal{C}$,

(4) $\mathcal{C} = \{\, c \in \mathbb{F}_q^n : cH^\top = 0 \,\}$,

(5) $GH^\top = O_{k\times n-k}$, $HG^\top = O_{n-k\times k}$,

(6) ha $G = [I_k|A]$ a $\mathcal{C}$ kód standard alakú generátormátrixa, akkor ellenőrző mátrixa $H = [-A^\top|I_{n-k}]$.

- P $[7,4,3]_2$ Hamming-kód. A generátormátrix a (34) permutációval $[A \mid I]$ alakot ölt, amelyhez az $[I \mid -A^\mathsf{T}]$ ellenőrző mátrix tartozik. Ezen a (34) permutáció inverze – ami önmaga – a következő mátrixot adja:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Ternér $[4,2,3]_3$ Hamming-kód. $-1 = 2$ és $-2 = 1$ felhasználásával

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Hibajavítás: $[1100]G = [0111100]$, elromlott üzenet: $h = [0101100]$. Mivel $hH^\mathsf{T} = [110]$, ami a 3. oszlop, tehát a 3. bit romlott el, ha $h = [0111110]$, akkor $hH^\mathsf{T} = [011]$, ami a 6. oszlop, tehát a 6. bitet kell javítani.

Hamming-kód

D egy $d = 2e + 1$ kódtávolságú $\mathcal{C}$ kód perfekt, ha bármely $x \in \mathbb{F}_q^n$-hez van olyan $w \in \mathcal{C}$ kódszó, melyek távolsága legföljebb e, azaz a kódszó-közepű e sugarú gömbök átfedés nélkül lefedik $\mathbb{F}_q^n$-t.

D H oszlopai közt $\mathbb{F}_q^r$ minden nemnulla vektorának pontosan egy nem nulla konstansszorosa szerepeljen. A H ellenőrző mátrixú kódot, r paraméterű $\mathbb{F}_q$ feletti $\mathrm{H}_{r,q}$ Hamming-kódnak, duálisát $\mathrm{S}_{r,q}$ szimplex kódnak nevezzük.

T A $\mathrm{H}_{r,q}$ Hamming-kód

$$\left[\frac{q^r-1}{q-1}, \frac{q^r-1}{q-1} - r, 3\right]_q$$

paraméterű perfekt kód, az $\mathrm{S}_{r,q}$ paraméterei

$$\left[\frac{q^r-1}{q-1}, r, q^{r-1}\right]_q .$$

Á A szimplex kód bármely két szavának távolsága $d = q^{r-1}$.

MDS-kódok

T Singleton-korlát Tetszőleges $\mathcal{C}$ lineáris $[n, k, d]$ kódra $d \leq n - k + 1$.

B $|\mathcal{C}| = q^k$, ha elhagyjuk minden kódszó első $d - 1$ betűjét, még mindig csupa különböző szót kapunk, ezek száma legföljebb $q^{n-(d-1)} = q^{n-d+1} \geq q^k \rightsquigarrow k \leq n - d + 1 \rightsquigarrow d \leq n - k + 1$.

D Egy kód MDS-kód (Maximum Distance Separable), ha $d = n - k + 1$.

Á A $\mathrm{H}_{2,q}$ kód $q > 2$ esetén $[n, n-2, 3]_q$ paraméterű MDS-kód.

D L! $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{F}^n$ nem-0 elemű, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{F}^n$ különböző elemből álló ($n \leqslant |\mathbb{F}|$), $0 \leqslant k \leqslant n$ egész. Ekkor a

$$\mathrm{GRS}_{n,k}(a, v) = \{\, (v_1 c(a_1), v_2 c(a_2), \ldots, v_n c(a_n)) \mid c(x) \in \mathbb{F}[x]_k \,\}$$

kódot általánosított Reed–Solomon-kódnak nevezzük. (A $v = (1, 1, \ldots, 1)$ esetén Reed–Solomon-kód)

T $\mathrm{GRS}_{n,k}(a, v)$ lineáris $[n, k, n - k + 1]$-kód, tehát MDS-kód.

A CD, DVD, Blu-ray, QR codes, DSL, WiMAX, DVB, ATSC, RAID-6,... (Wikipedia)

Differenciaegyenletek

Fibonacci-sorozat

D $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ (oeis.org/A000045: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987,...)

T Explicit alakja $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

B Az $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ egyenletre keressünk $F_n = \lambda^n$ alakú megoldást $\rightsquigarrow \lambda^{n+1} = \lambda^n + \lambda^{n-1} \rightsquigarrow \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, megoldása: $\lambda_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. $(1, \lambda_1, \lambda_1^2, \dots)$ és $(1, \lambda_2, \lambda_2^2, \dots)$ lineárisan függetlenek, így minden

$$s_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

lin. kombinációjuk is kielégíti a rekurzív egyenletet. Keressünk olyat, melyre $F_0 = 0$, $F_1 = 1$:

$$c_1 + c_2 = 0, \qquad (n = 0)$$

$$c_1\frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1, \qquad (n = 1)$$

amelynek megoldása $c_1 = -c_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Differenciaegyenlet-rendszer

D L! $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m\times m}$. Az $\boxed{\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n}$ egyenletet elsőrendű homogén lineáris differenciaegyenlet-rendszernek nevezzük, ahol $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{F}^m$ adott vektor, $\mathbf{x}_n$ ismeretlen, ha $n > 0$. Az $\boxed{\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n + \mathbf{b}_n}$ elsőrendű inhomogén lineáris differenciaegyenlet-rendszer, ahol $\mathbf{x}_0, \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \dots$ adott vektorok, $\mathbf{x}_n$ ismeretlen, ha $n > 0$.

T Az elsőrendű lineáris differenciaegyenlet-rendszer megoldása

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n\mathbf{x}_0, \qquad \text{(homogén)}$$

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n\mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{A}^{n-1-i}\mathbf{b}_i, \qquad \text{(inhomogén)}$$

ahol $n > 0$.

B Egyszerű behelyettesítéssel.

T Az $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n + \mathbf{b}$ differenciaegyenlet-rendszer megoldássorozata pontosan akkor konvergens minden $\mathbf{b}, \mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ vektorra, ha $\mathbf{A}$ spektrálsugara 1-nél kisebb, és ekkor a határérték $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$.

B Mivel

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n\mathbf{x}_0 + (\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \ldots + \mathbf{A}^{n-1})\mathbf{b},$$

ami $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ esetén bármely $\mathbf{b}$-re pontosan akkor konvergens, ha $\mathbf{I} + \mathbf{A} + \ldots + \mathbf{A}^{n-1}$ konvergens, azaz ha $\rho(\mathbf{A}) < 1$. Ekkor $\lim_{n\to\infty} \mathbf{A}^n = \mathbf{O}$, és ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \left(\mathbf{I} + \mathbf{A} + \ldots + \mathbf{A}^{n-1}\right) = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1},$$

amiből $\mathbf{x}_n \to \mathbf{O}\mathbf{x}_0 + (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$, ami nem függ $\mathbf{x}_0$-tól.

P Konvergens-e az

$$\mathbf{x}_n = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{n-1} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

differenciaegyenlet-rendszer megoldásaként kapott vektorsorozat? Ha igen, mi a határértéke?

M A karakterisztikus polinom

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} - \lambda & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{3}\lambda - \frac{1}{3}$$

Mivel $\chi(-1) > 0$, $\chi(0) < 0$, $\chi(1) > 0$, ezért mindkét gyök -1 és 1 közé esik, azaz $\rho(\mathbf{A}) < 1$, tehát a sorozat konvergens!

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Tehát a határérték a $(2, -1)$ vektor.

A differenciaegyenlet

D Adott $a_1, a_2, \ldots, a_d \in \mathbb{F}$ konstansok esetén az

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \ldots + a_d x_{n-d},$$

alakú egyenletet d-edrendű állandó együtthatós homogén lineáris differenciaegyenletnek, megoldását d-edrendű rekurzív sorozatoknak nevezzük, a

$$\chi(t) = t^d - a_1 t^{d-1} - a_2 t^{d-2} - \ldots - a_d$$

polinomot a karakterisztikus polinomjának, annak gyökeit a sajátértékeinek. Az $x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}$ változókra kirótt $x_0 = k_0$, $x_1 = k_1, \ldots, x_{d-1} = k_{d-1}$ egyenleteket kezdeti feltételeknek nevezzük, ahol $k_0, k_1, \ldots, k_{d-1}$ adott $\mathbb{F}$-beli konstansok. Az $x_d, x_{d+1}, \ldots$ változók az ismeretlenek.

T A megoldássorozatok vektorteret alkotnak.

A differenciaegyenlet megoldása

- Ha a karakterisztikus egyenlete

$$x_d - a_1 x_{d-1} - a_2 x_{d-2} - \ldots - a_d x_0 = 0,$$

akkor

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+d-1} \\ x_{n+d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ a_d & a_{d-1} & \ldots & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_{n+d-2} \\ x_{n+d-1} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n,$$

ahol $\mathbf{x}_n = (x_n, \ldots, x_{n+d-1})$, és $\mathbf{A}$ a $\chi(x)$ polinom kísérő mátrixának transzponáltja, melynek sajátértékei egyenlők a differenciaegyenlet sajátértékeivel, és melyre $\mu(t) = \pm\chi(t)$, így minden sajátértékhez egyetlen Jordan-blokk tartozik.

T Tekintsük az állandó együtthatós homogén lineáris

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \ldots + a_d x_{n-d},$$

differenciaegyenletet.

1. Ha λ sajátértéke a dae-nek, akkor az $x_n = \lambda^n$ egy megoldása.
2. Ha a dae spektruma $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$, λ_i alg. mult. a_i, akkor az összes megoldása előáll

$$x_n = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{a_i - 1} c_{ij} n^j \lambda_i^n$$

   alakban. A c_{ij} együtthatók egyértelműen megkaphatók a kezdeti feltételekből.
3. Speciálisan, ha a sajátértékek mind különbözőek, akkor az összes megoldás előáll a köv. alakban:

$$x_n = \sum_{i=1}^{d} c_i \lambda_i^n$$

B 1. Ha λ sajátérték $\rightsquigarrow \chi(\lambda) = 0 \rightsquigarrow \lambda^d = a_1\lambda^{d-1} + a_2\lambda^{d-2} + \ldots + a_d$, $\rightsquigarrow \lambda^n = a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_d\lambda^{n-d} \rightsquigarrow x_n = \lambda^n$ megoldása a dae-nek.

\- 2. Ha $\mathbf{x}_n = \mathbf{A}\mathbf{x}_{n-1}$, akkor $\mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n\mathbf{x}_0$, és a Jordan-felbontást használva $\mathbf{x}_n = \mathbf{C}\mathbf{J}^n\mathbf{C}^{-1}\mathbf{x}_0$. L! λ alg. mult. $a \rightsquigarrow \mathbf{J}^n$-nek a λ-hoz blokkja

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{bmatrix}^n_{a\times a} = \begin{bmatrix} \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \ldots & \ldots & \binom{n}{a-1}\lambda^{n-a+1} \\ 0 & \lambda^n & \ldots & \ldots & \binom{n}{a-2}\lambda^{n-a+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda^n \end{bmatrix}.$$

E blokk minden eleme a λ^n, $n\lambda^n$, $n^2\lambda^n$, ..., $n^{a-1}\lambda^n$ elemek konstans (azaz n-től független!) együtthatókkal vett lineáris kombinációja $\rightsquigarrow \mathbf{C}\mathbf{J}^n\mathbf{C}^{-1}$ minden eleme a λ_i^n, $n\lambda_i^n$, $n^2\lambda_i^n$, ..., $n^{a_i-1}\lambda_i^n$ lineáris kombinációja, ahol a_i a λ_i multiplicitása.

\- A 3. állítás az előző spec. esete, ahol $a_i = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, d)$.

B Oldjuk meg az $x_n = 5x_{n-1} - 8x_{n-2} + 4x_{n-3}$, dae-et az $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 5$ kezdeti feltételek mellett.

M $\chi(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 \rightsquigarrow$ az összes megoldás: $x_n = c_1 1^n + c_2 2^n + c_3 n 2^n$.

A kezdeti feltételek a következő egyenletrendszerre vezetnek:

$$
\begin{aligned}
n = 0,\quad x_0 = 0: &\qquad c_1 + c_2 = 0\\
n = 1,\quad x_1 = 1: &\qquad c_1 + 2c_2 + 2c_3 = 1\\
n = 2,\quad x_2 = 5: &\qquad c_1 + 2^2 c_2 + 2\cdot 2^2 c_3 = 5,
\end{aligned}
$$

amelynek egyetlen megoldása $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $c_3 = 1 \rightsquigarrow$ $x_n = 1 - 2^n + n2^n$ (a sorozat első néhány tagja 0, 1, 5, 17, 49, 129,. . .)

Egy alkalmazás: determináns

P Számítsuk ki az alábbi n-edrendű determináns értékét:

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

M Az első sor kifejtésével $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$, a kezdeti értékek:

$$D_1 = 2, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

$\chi(x) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 \rightsquigarrow \lambda_{1,2} = 1, \rightsquigarrow D_n = c_1 + c_2 n$. A kezd. felt.-ből

$$\begin{aligned} n = 1, \quad D_1 = 2 : \qquad & c_1 + c_2 = 2, \\ n = 2, \quad D_2 = 3 : \qquad & c_1 + 2c_2 = 3, \end{aligned}$$

amelynek egyetlen megoldása $c_1 = c_2 = 1$. Tehát $D_n = n + 1$.

Keresés a web-en

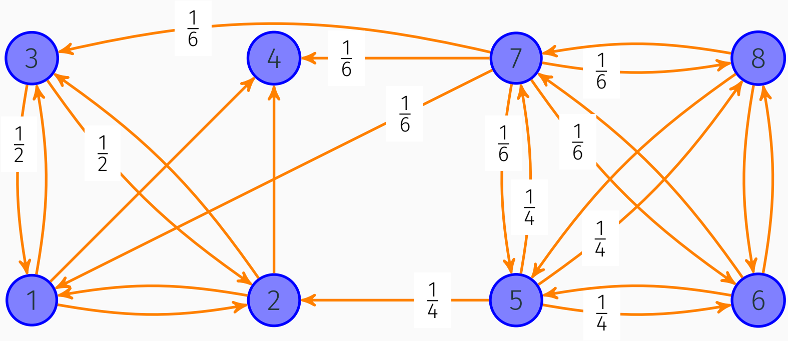
Keresés a web-en

PageRank

Google PageRank: a 25 000 000 000$-os sajátvektor

- Larry Page és Sergey Brin: : egy dokumentum PageRank értéke annál magasabb, minél több nagy PageRank érékű dokumentum mutat rá.
- Modell: weben szörfölő, az oldalak linkjei közül véletlenszerűen választ. Ha e bolyongást sokáig folytatja, kialakul egy sorrend, melyben minden dokumentum azzal arányos számú pontot kap, ahányszor ott járt a szörfölő.
- Súlyozott élű gráf: a dokumentumok a gráf csúcsai, az i-edik csúcsból él megy a j-edik csúcsba, ha az i-edik dokumentumban van link a j-edikre. A súlya $1/k$, ha k a ki-foka.

PageRank: egy 8-dokumentumos példa



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/3 & 1/6 & 0 \end{bmatrix}$$

Javítás

- E mátrix majdnem sztohasztikus, tegyük azzá:

$$[\mathbf{A}]_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{ha megy i-ből j-be él és i ki-foka k,} \\ \frac{1}{n}, & \text{ha i ki-foka 0 és n a csúcsok száma,} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

- ha vannak dokumentumok, amelyek csak egymásra hivatkoznak, a szörfölő beragadhat, a mátrix reducibilis (Pl.: $\{1, 2, 3, 4\}$).
- a szörfölő minden csúcsban d valószínűséggel egyenletes eloszlás szerint választ az összes csúcs közül, és $1 - d$ valószínűséggel a csúcsból kifutó élek végpontjai közül egyenletes eloszlás szerint:

$$\mathbf{M} = (1 - d)\mathbf{A} + d\frac{1}{n}\mathbf{J},$$

ahol $\mathbf{J}$ a csupa 1-esből álló mátrix, n e négyzetes mátrixok rendje, $d \in (0, 1)$ (ált: $d \in (0.1, 0.2)$, pl. legyen $d = 0.15$)

Markov-lánc, Perron-tétel

- $\mathbf{M}$ pozitív, sztochasztikus ($\mathbf{A}$ és $\frac{1}{n}\mathbf{J}$ is)
- tehát $\mathbf{M}$ tehát egy Markov-lánc átmenetmátrixa
- Perron-tétel: spektrálsugara 1, az 1 egyszeres sajátérték, nincs több 1-abszolút értékű sajátértéke, és az 1-hez tartozik az egyetlen olyan pozitív $\mathbf{v}$ sajátvektor, melyre $\|\mathbf{v}\|_1 = 1$
- $\lim\limits_{m\to\infty} \mathbf{M}^m\mathbf{x} = \mathbf{v}$, azaz $\mathbf{v}$ a stacionárius eloszlás.
- hatalmas mátrixok esetén $\mathbf{A}$ még ritka, de $\mathbf{M}$ már nem:

$$\mathbf{M}\mathbf{x} = \left((1-d)\mathbf{A} + d\frac{1}{n}\mathbf{J}\right)\mathbf{x} = (1-d)\mathbf{A}\mathbf{x} + \frac{d}{n}\mathbf{1},$$

- elég csak az $\mathbf{A}\mathbf{x}$ vektor-mátrix szorzást elvégezni és néhányszor iterálni.

Példa

$$\begin{bmatrix} .019 & .302 & .444 & .125 & .019 & .019 & .160 & .019 \\ .302 & .019 & .444 & .125 & .231 & .019 & .019 & .019 \\ .302 & .302 & .019 & .125 & .019 & .019 & .160 & .019 \\ .302 & .302 & .019 & .125 & .019 & .019 & .160 & .019 \\ .019 & .019 & .019 & .125 & .019 & .302 & .160 & .302 \\ .019 & .019 & .019 & .125 & .231 & .019 & .160 & .302 \\ .019 & .019 & .019 & .125 & .231 & .302 & .019 & .302 \\ .019 & .019 & .019 & .125 & .231 & .302 & .160 & .019 \end{bmatrix}$$

A stacionárius eloszlás:

$$\mathbf{v} = (.152, .157, .137, .137, .106, .100, .112, .100).$$

Eszerint a dokumentumok sorrendje 2, 1, 3 és 4 holtversenyben, 7, 5, 6 és 8 holtversenyben. (az 1, 2, 3, 4 dokumentumokra kívülről négy link is mutat)

Keresés a web-en

A HITS algoritmus

HITS (Hyperlink-Induced Topic Search)

- Jon Kleinberg: HITS
- A PageRank önmeghatározását itt egy kettős önmeghatározás váltja: a web-en fontos oldalak közt vannak tekintélyek (authorities), és gyűjtőoldalak (hubs), melyek egy téma fontos és releváns oldalaira mutatnak. Egy tekintély mértéke annál nagyobb, minél több nagy értékű gyűjtő mutat rá, míg egy gyűjtő értéke annál nagyobb, minél több nagy értékű tekintélyre mutat.
- Minden linket figyelembe veszünk, az adjacenciamátrixszal számolunk:

$$[\mathbf{A}]_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha megy } i\text{-ből } j\text{-be él,} \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

- A tekintélyértékek vektora $\mathbf{a}$, a gyűjtőértékek vektora $\mathbf{h}$.

HITS

- Szeretnénk, hogy minden oldal tekintélyértéke arányos legyen a rá mutató oldalak gyűjtőértékének összegével, gyűjtőértéke a benne lévő linkekhez tartozó oldalak tekintélyértékének összegével:

$$c\mathbf{h} = \mathbf{A}\mathbf{a}$$
$$c\mathbf{a} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{h}$$

- $c^2\mathbf{a} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{a}$. Iteráció:

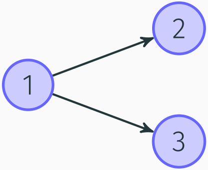
$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{m+1} &= \mathbf{A}\mathbf{a}_m \\ \mathbf{a}_{m+1} &= \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{h}_{m+1} \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{h}_{m+1} &= \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{h}_m \\ \mathbf{a}_{m+1} &= \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{a}_m \end{aligned}$$

Ha $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}$ legnagyobb s.é.-e domináns, akkor (hatványmódszer)

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\mathbf{a}_m}{|\mathbf{a}_m|} = \mathbf{a}, \qquad \lim_{m\to\infty} \frac{\mathbf{h}_m}{|\mathbf{h}_m|} = \mathbf{h},$$

a legnagyobb s.é.-hez tartozó egységnyi s.vektort adja. Így $\mathbf{a}$ és $\mathbf{h}$ az $\mathbf{A}$ legnagyobb szing.értékéhez tartozó jobb és bal szing. vektora.

HITS



A gráf adjacenciamátrixa (szomszédsági mátrixa) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

a tekintélyértékek induló vektora $\mathbf{a}_0 = (0, 1, 0)$:

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{A}\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \mathbf{a}_1 = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{h}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Folytatva kapjuk, hogy $\mathsf{h}_2 = (2, 0, 0)$, $\mathsf{a}_2 = (0, 2, 2)$, stb.

- Mindig lenormálva: $\mathsf{h} = (1, 0, 0)$, $\mathsf{a} = (0, 1/2, 1/2)$ (az 1-es dokumentum 1-értékű gyűjtő és 0-értékű tekintély, míg a másik két dokumentum 0-értékű gyűjtő, és azonos értékű tekintélyek).
- Általában

$$\mathsf{h} = \lim_{m\to\infty} \frac{\mathsf{h}_m}{\|\mathsf{h}_m\|_1}, \text{ és } \mathsf{a} = \lim_{m\to\infty} \frac{\mathsf{a}_m}{\|\mathsf{a}_m\|_1}$$

vektorok az A mátrix jobb, illetve bal Perron-vektorai.