BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

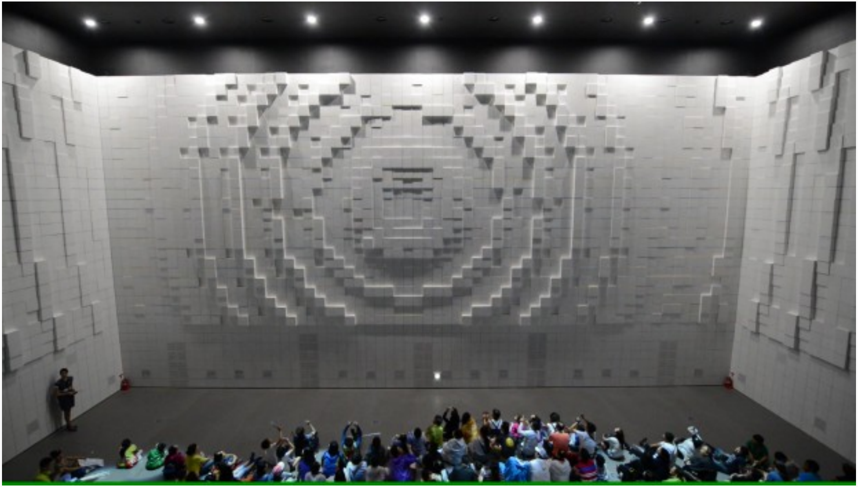
Haladó lineáris algebra

BMETE90MX54 (FELSŐBB MATEMATIKA VILLAMOSMÉRNÖKÖKNEK)

Mátrixegyenletek

HIPERMÁTRIXOK, VEC, KRONECKER, LINEÁRIS MÁTRIXEGYENLETEK

Wettl Ferenc
ALGEBRA TANSZÉK



Tartalom

Hipermátrixok

Műveletek hipermátrixokkal

D L! $n_1, n_2, \ldots, n_d \in \mathbb{N}^+$, S egy tetszőleges nem üres halmaz (pl. $S = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$...). d-dimenziós vagy d-edrendű $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_d$-típusú hipermátrixnak nevezzük az

$$\mathbf{A} : \{1, \ldots, n_1\} \times \{1, \ldots, n_2\} \times \ldots \times \{1, \ldots, n_d\} \to S$$

alakú leképezést. Az $\mathbf{A}(i_1, i_2, \ldots, i_d)$ elemet $a_{i_1 i_2 \ldots i_d}$-vel jelöljük (egy d-dimenziós táblázat egy eleme):

$$\mathbf{A} = [a_{i_1 i_2 \ldots i_d}]_{i_1, i_2, \ldots, i_d = 1}^{n_1, n_2, \ldots, n_d} \text{ vagy egyszerűbben } \mathbf{A} = [a_{i_1 i_2 \ldots i_d}].$$

Ha $n_1 = n_2 = \cdots = n_d = n$, akkor a hiper-kockamátrixról beszélünk.

J Az S elemeiből képzett összes $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_d$-típusú hipermátrixok halmazát $S^{n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_d}$ jelöli.

m A másodrendű hipermátrixok egybeesnek a mátrixokkal.

P A 3-adrendű $4 \times 2 \times 3$-típusú hipermátrixok általános alakja

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc} a_{111} & a_{121} & a_{112} & a_{122} & a_{113} & a_{123} \\ a_{211} & a_{221} & a_{212} & a_{222} & a_{213} & a_{223} \\ a_{311} & a_{321} & a_{312} & a_{322} & a_{313} & a_{323} \\ a_{411} & a_{421} & a_{412} & a_{422} & a_{413} & a_{423} \end{array}\right]$$

D Két azonos típusú hipermátrix összeadása és egy hipermátrix skalárral való szorzása elemenként:

$$[a_{i_1 i_2 \dots i_d}] + [b_{i_1 i_2 \dots i_d}] := [a_{i_1 i_2 \dots i_d} + b_{i_1 i_2 \dots i_d}],$$
$$c[a_{i_1 i_2 \dots i_d}] := [c a_{i_1 i_2 \dots i_d}],$$

Hipermátrix transzponáltja

D Legyen π az $\{1, 2, \ldots, d\}$ halmaz egy permutációja. A d-edrendű $\mathbf{A} = [a_{i_1 i_2 \ldots i_d}] \in S^{n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_d}$ hipermátrix π-transzponáltján az

$$\mathbf{A}^{\pi} = [a_{i_{\pi(1)} i_{\pi(2)} \ldots i_{\pi(d)}}] \in S^{n_{\pi(1)} \times n_{\pi(2)} \times \ldots \times n_{\pi(d)}}$$

hipermátrixot értjük. Egy $\mathbf{A} \in S^{n \times n \times \ldots \times n}$ hiper-kockamátrix szimmetrikus, ha minden π permutációra $\mathbf{A}^{\pi} = \mathbf{A}$, és ferdén szimmetrikus, ha $\mathbf{A}^{\pi} = \operatorname{sgn}(\pi)\mathbf{A}$, ahol $\operatorname{sgn}(\pi) = -1$, ha a π páratlan permutáció, és 1, ha páros.

P A $2 \times 2 \times 2$-es hipermátrixok és szimmetrikus hipermátrixok általános alakja

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a_{111} & a_{121} & a_{112} & a_{122} \\ a_{211} & a_{221} & a_{212} & a_{222} \end{array}\right], \qquad \left[\begin{array}{cc|cc} a & b & b & c \\ b & c & c & d \end{array}\right].$$

P A $3 \times 3 \times 3$-as hipermátrixok, szimmetrikus és ferdén szimmetrikus hipermátrixok általános alakja

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_{111} & a_{121} & a_{131} & a_{112} & a_{122} & a_{132} & a_{113} & a_{123} & a_{133} \\ a_{211} & a_{221} & a_{231} & a_{212} & a_{222} & a_{232} & a_{213} & a_{223} & a_{233} \\ a_{311} & a_{321} & a_{331} & a_{312} & a_{322} & a_{332} & a_{313} & a_{323} & a_{333} \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a & b & c & b & d & e & c & e & f \\ b & d & e & d & g & h & e & h & i \\ c & e & f & e & h & i & f & i & j \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr|rrr} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

ahol $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j \in S$ nem feltétlenül különböző elemek.

Hipermátrixok külső szorzata

D Legyen $\mathbf{A} \in S^{n_1 \times \cdots \times n_d}$ egy d-edrendű és $\mathbf{B} \in S^{m_1 \times \cdots \times m_e}$ egy e-edrendű hipermátrix. Külső szorzatukon azt a $(d+e)$-edrendű

$$\mathbf{C} = [c_{i_1 \dots i_d j_1 \dots j_e}]_{i_1,\dots,i_d,j_1,\dots,j_e=1}^{n_1,\dots,n_d,m_1,\dots,m_e} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \in S^{n_1 \times \cdots \times n_d \times m_1 \times \cdots \times m_e}$$

hipermátrixot értjük, melyre

$$c_{i_1 \dots i_d j_1 \dots j_e} = a_{i_1 \dots i_d} b_{j_1 \dots j_e}.$$

P

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right]$$

vec-függvény és Kronecker-szorzat

vec-függvény

D ha $\mathsf{A} = [\mathsf{a}_1|\mathsf{a}_2|\ldots|\mathsf{a}_n]$, akkor

$$\mathrm{vec}(\mathsf{A}) = \begin{bmatrix} \mathsf{a}_1 \\ \mathsf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathsf{a}_n \end{bmatrix}.$$

P $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, akkor $\mathrm{vec}(\mathsf{A}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Kronecker-szorzat

D Legyen $\mathbf{A}$ egy $m \times n$-es, $\mathbf{B}$ egy $p \times q$-as mátrix. Kronecker-szorzatukon (vagy más néven tenzorszorzatukon) azt az $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$-vel jelölt $mp \times nq$ méretű mátrixot értjük, melynek blokkmátrix alakja

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \dots & a_{1n}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \dots & a_{2n}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{m2}\mathbf{B} & \dots & a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

P $$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -3 & -3 & -3 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

A Kronecker-szorzat és a vec tulajdonságai

T Adva van $\mathsf{A}_{m\times n}$, $\mathsf{B}_{m\times n}$, $\mathsf{C}_{p\times q}$, $\mathsf{D}_{r\times s}$,

- $(\mathsf{A}+\mathsf{B})\otimes\mathsf{C}=\mathsf{A}\otimes\mathsf{C}+\mathsf{B}\otimes\mathsf{C}$, $\mathsf{C}\otimes(\mathsf{A}+\mathsf{B})=\mathsf{C}\otimes\mathsf{A}+\mathsf{C}\otimes\mathsf{B}$,
- $(\mathsf{A}\otimes\mathsf{C})\otimes\mathsf{D}=\mathsf{A}\otimes(\mathsf{C}\otimes\mathsf{D})$,
- $(\mathsf{A}\otimes\mathsf{C})^\mathsf{T}=\mathsf{C}^\mathsf{T}\otimes\mathsf{A}^\mathsf{T}$,

T Adva van $\mathsf{A}_{m\times n}$, $\mathsf{B}_{p\times q}$, $\mathsf{X}_{n\times p}$

1. $\mathrm{vec}(\mathsf{AX})=(\mathsf{I}_p\otimes\mathsf{A})\,\mathrm{vec}(\mathsf{X})$, $\mathrm{vec}(\mathsf{XB})=(\mathsf{B}^\mathsf{T}\otimes\mathsf{I}_n)\,\mathrm{vec}(\mathsf{X})$,
2. $\mathrm{vec}(\mathsf{AXB})=(\mathsf{B}^\mathsf{T}\otimes\mathsf{A})\,\mathrm{vec}(\mathsf{X})$,
3. $\mathrm{vec}(\mathsf{AX}+\mathsf{XB})=(\mathsf{I}_p\otimes\mathsf{A}+\mathsf{B}^\mathsf{T}\otimes\mathsf{I}_n)\,\mathrm{vec}(\mathsf{X})$.

B 1. $$(\mathsf{I}_p\otimes\mathsf{A})\,\mathrm{vec}(\mathsf{X})=\begin{bmatrix}\mathsf{A} & \dots & \mathsf{O}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathsf{O} & \dots & \mathsf{A}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathsf{X}_{*1}\\ \vdots\\ \mathsf{X}_{*p}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathsf{AX}_{*1}\\ \vdots\\ \mathsf{AX}_{*p}\end{bmatrix}=\mathrm{vec}(\mathsf{AX})$$

2. $$[\mathsf{AXB}]_{*j}=\mathsf{AXB}_{*j}=\sum_{i=1}^{p}b_{ij}(\mathsf{AX})_{*i}=\sum_{i=1}^{p}(b_{ij}\mathsf{A})\mathsf{X}_{*i}$$
$$=[b_{1j}\mathsf{A}|\dots|b_{nj}\mathsf{A}]\,\mathrm{vec}(\mathsf{X})=[\mathsf{B}^\mathsf{T}\otimes\mathsf{A}]_{j*}\,\mathrm{vec}(\mathsf{X})$$

Lineáris mátrixegyenletek

Lineáris mátrixegyenletek típusai

D Lineáris mátrixegyenletnek nevezzük a

$$\sum_{i=1}^{k} \mathsf{A}_i \mathsf{X} \mathsf{B}_i = \mathsf{C}, \tag{1}$$

ahol $\mathsf{C} \in \mathbb{C}^{p\times q}$, $\mathsf{A}_i \in \mathbb{C}^{p\times m}$, $\mathsf{X} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\mathsf{B}_i \in \mathbb{C}^{n\times q}$.

- Sylvester-egyenlet: $\mathsf{C}, \mathsf{X} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\mathsf{A} \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $\mathsf{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$$\mathsf{AX} + \mathsf{XB} = \mathsf{C}, \tag{2}$$

- Általánosított Sylvester-egyenlet: az (1) spec. esete $k = 2$-re

$$\mathsf{A}_1\mathsf{X}\mathsf{B}_1 + \mathsf{A}_2\mathsf{X}\mathsf{B}_2 = \mathsf{C}, \tag{3}$$

- Ljapunov-egyenlet a Sylvester-egyenlet speciális esete akkor, ha $m = n$, $\mathsf{B} = \mathsf{A}^{\mathsf{H}}$, $\mathsf{C} = \mathsf{C}^{\mathsf{H}}$, azaz

$$\mathsf{AX} + \mathsf{XA}^{\mathsf{H}} = \mathsf{C}. \tag{4}$$

A lineáris mátrixegyenlet megoldása

T Az (1) lineáris mátrixegyenlet megoldható az

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \mathsf{B}_i^\mathsf{T} \otimes \mathsf{A}_i\right) \mathsf{x} = \operatorname{vec}(\mathsf{C}) \tag{5}$$

lineáris egyenletrendszer segítségével, ahol az együtthatómátrix $(pq) \times (mn)$-es méretű és $\mathsf{x} = \operatorname{vec}(\mathsf{X})$.

B $\operatorname{vec}(\mathsf{AXB}) = (\mathsf{B}^\mathsf{T} \otimes \mathsf{A}) \operatorname{vec}(\mathsf{X})$

m A gyakorlatban ennél gyorsabb algoritmusok léteznek, melyek az A_i és B_i mátrixokat háromszögalakra vagy Hessenberg-alakra hozzák...

Lineáris mátrixegyenlet megoldása

P Oldjuk meg az $\mathbf{AX} + \mathbf{XB} = \mathbf{C}$ és az $\mathbf{AX} + \mathbf{XB} = \mathbf{D}$ Sylvester-egyenleteket, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

M Mindkét egyenlet bal oldala $\mathbf{AXI} + \mathbf{IXB}$ alakú, így a megoldást nyújtó (5) egyenlet együtthatómátrixa

$$\mathbf{I} \otimes \mathbf{A} + \mathbf{B}^{\mathsf{T}} \otimes \mathbf{I} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

- Így az $\mathsf{AX} + \mathsf{XB} = \mathsf{C}$ egyenletnek megfelelő bővített mátrix és annak redukált lépcsős alakja:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{rref}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

- Innen az egyenletrendszer megoldása

$$\mathsf{x} = \operatorname{vec}(\mathsf{X}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{azaz} \quad \mathsf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az $\mathsf{AX} + \mathsf{XB} = \mathsf{D}$ egyenletnek megfelelő bővített mátrix

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right], \quad \text{az első két sor: ellentmondásos.}$$

A Sylvester-egyenlet egyértelmű megoldhatósága

T A (2) Sylvester-egyenlet megoldását nyújtó

$$\left(\mathsf{I}_n \otimes \mathsf{A} + \mathsf{B}^\top \otimes \mathsf{I}_m\right) \operatorname{vec}(\mathsf{X}) = \operatorname{vec}(\mathsf{C})$$

egyenletrendszer $(mn) \times (mn)$-es együtthatómátrixa pontosan akkor invertálható, ha A-nak és $-\mathsf{B}$-nek nincs közös sajátértéke.

B A bizonyításhoz elég megmutatni, hogy ha

$$\sigma(\mathsf{A}) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}, \quad \sigma(\mathsf{B}) = \{\mu_1, \ldots, \mu_n\},$$

akkor

$$\sigma\left(\mathsf{I}_n \otimes \mathsf{A} + \mathsf{B}^\top \otimes \mathsf{I}_m\right) = \{\lambda_i + \mu_j \mid i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n\}.$$

- Ekkor az $\mathsf{I}_n \otimes \mathsf{A} + \mathsf{B}^\top \otimes \mathsf{I}_m$ mátrixnak a 0 nem lesz sajátértéke, azaz invertálható lesz, ha A és $-\mathsf{B}$ spektrumának metszete üres.

- TFH A és $\mathsf{B}^\top$ Jordan-felbontása
$$\mathsf{A} = \mathsf{C}\mathsf{J}_\mathsf{A}\mathsf{C}^{-1}, \quad \text{illetve} \quad \mathsf{B}^\top = \mathsf{D}\mathsf{J}_\mathsf{B}\mathsf{D}^{-1}.$$

- $$\begin{aligned}
&\mathsf{I}_n \otimes \mathsf{A} + \mathsf{B}^\top \otimes \mathsf{I}_m \\
&\quad = \mathsf{D}\mathsf{I}_n\mathsf{D}^{-1} \otimes \mathsf{C}\mathsf{J}_\mathsf{A}\mathsf{C}^{-1} + \mathsf{D}\mathsf{J}_\mathsf{B}\mathsf{D}^{-1} \otimes \mathsf{C}\mathsf{I}_m\mathsf{C}^{-1} \\
&\quad = (\mathsf{D} \otimes \mathsf{C})(\mathsf{I} \otimes \mathsf{J}_\mathsf{A})(\mathsf{D}^{-1} \otimes \mathsf{C}^{-1}) + (\mathsf{D} \otimes \mathsf{C})(\mathsf{J}_\mathsf{B} \otimes \mathsf{I}_m)(\mathsf{D}^{-1} \otimes \mathsf{C}^{-1}) \\
&\quad = (\mathsf{D} \otimes \mathsf{C})(\mathsf{I} \otimes \mathsf{J}_\mathsf{A} + \mathsf{J}_\mathsf{B} \otimes \mathsf{I}_m)(\mathsf{D} \otimes \mathsf{C})^{-1}.
\end{aligned}$$

Mivel az $\mathsf{I} \otimes \mathsf{J}_\mathsf{A} + \mathsf{J}_\mathsf{B} \otimes \mathsf{I}_m$ mátrix felsőháromszög-mátrix, így spektruma a főátló elemeiből áll, azok pedig a $\{\lambda_i + \mu_j\}$ multihalmazt adják.

Eszerint a hozzá hasonló $\mathsf{I}_n \otimes \mathsf{A} + \mathsf{B}^\top \otimes \mathsf{I}_m$ mátrixnak ugyanez a spektruma.

P Megoldható-e egyértelműen az $AX + XB = C$ mátrixegyenlet az előző feladatbeli $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ és $B = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ mátrixok esetén?

M A tétel szerinti spektrumok

$$\sigma(A) = \{1, -1\}, \quad \sigma(-B) = \{-1, -2\},$$

melyek metszete nem üres, így az $I_2 \otimes A + B^T \otimes I_2$ mátrix nem invertálható, tehát az $AX + XB = C$ mátrixegyenletnek vagy végtelen sok megoldása van, vagy ellentmondásos!