



BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM



Haladó lineáris algebra

BMETE90MX54 (FELSŐBB MATEMATIKA VILLAMOSMÉRNÖKÖKNEK)



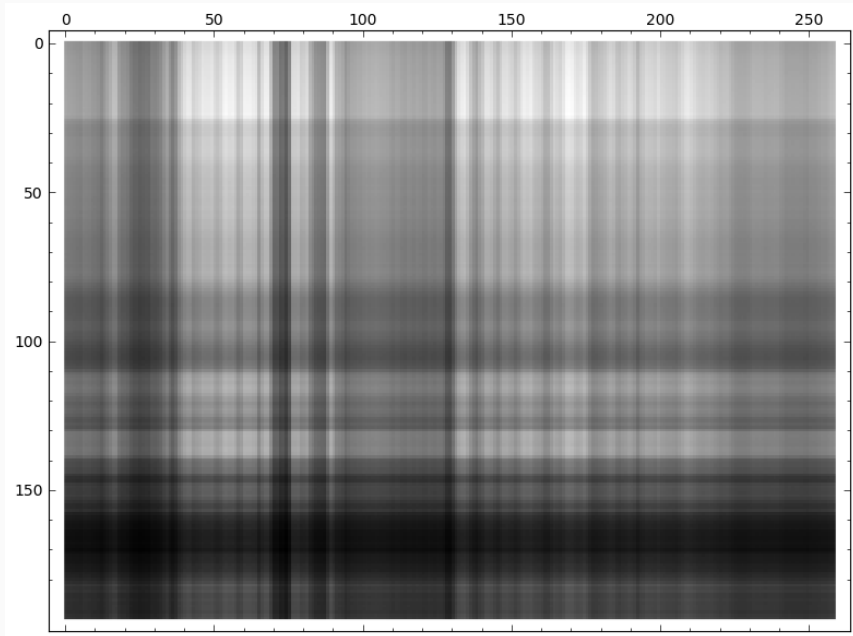
Szinguláris értékek

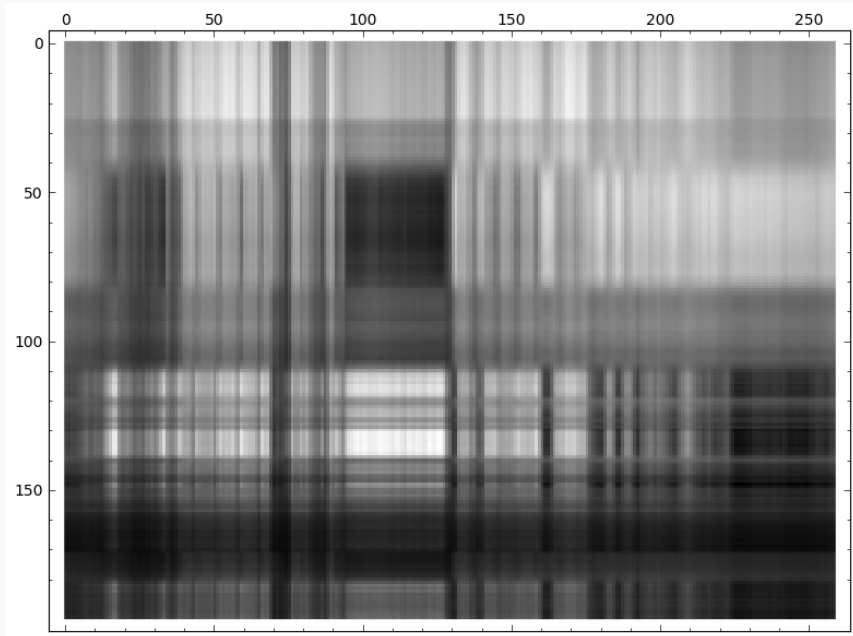
SZINGULÁRIS ÉRTÉK SZERINTI FELBONTÁS, VEKTORNORMA, MÁTRIXNORMA

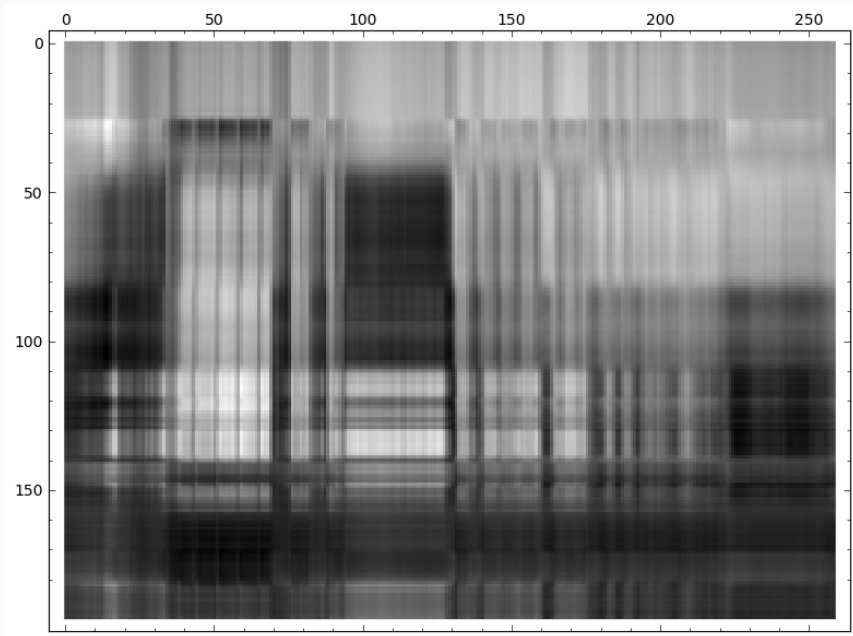


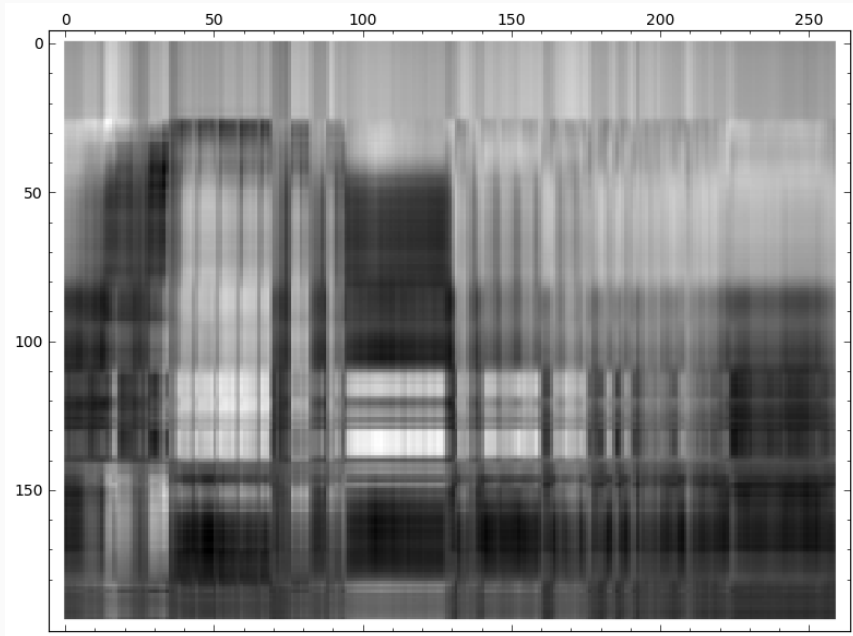
Wettl Ferenc

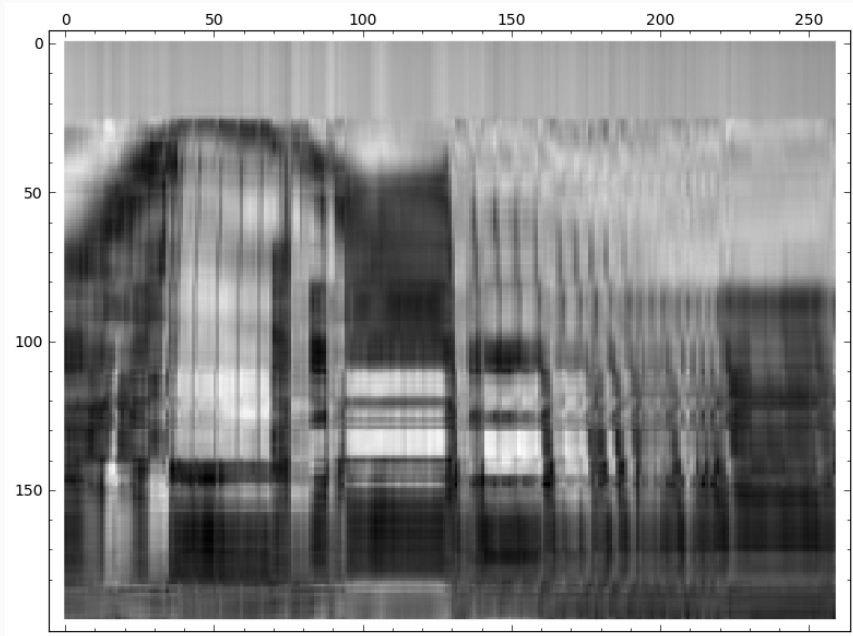
ALGEBRA TANSZÉK

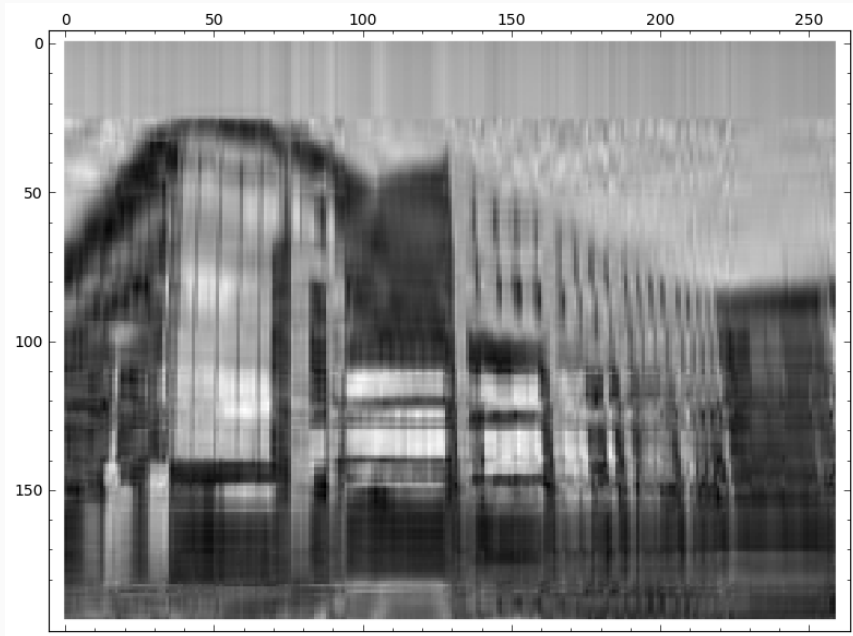


















Szinguláris érték, SVD

Norma

- Szinguláris érték, jobb és bal szinguláris vektor meghatározása, szinguláris felbontás és geometriai interpretációja
- SVD alkalmazásai: pszeudo inverz, polárfelbontás, kis rangú approximáció (Eckart–Young-tétel)
- Norma, mátrixnorma, indukált norma

Szinguláris érték, SVD

Az ortogonális diagonalizáció újraértelmezése

- A valós szimmetrikus mátrixok **ortogonális diagonalizálását** újraértelmezzük tetszőleges valós és komplex mátrixokra:
sajátértékek \rightarrow szinguláris értékek
sajátfelbontás \rightarrow szinguláris érték szerinti felbontás (SVD)
- A feltételeken lazítunk: egy helyett két ortonormált bázis
 $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ lineáris transzformáció $\rightarrow \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$ lineáris leképezés
 \mathcal{V} ONB $\rightarrow \mathcal{V}_1$ és \mathcal{V}_2 egy-egy ONB
- alkalmazásai: statisztika, információ-tömörítés, képfeldolgozás (főkomponensanalízis képekre: eigenfaces), videomásolat igazolás (azonos kép–különböző forrás, különböző kép–azonos forrás), LCD hibakeresés, szkennelt 3D pontok alapján felületi normális pl. árnyékoláshoz, animáció generálása, az egyenletrsz.-ek megoldásához használt leghatékonyabbak algoritmusok, a lineáris transzformáció geometriájának analízise. 5

Diagonális két ONB-ban

m Az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrixhoz olyan ortonormált $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ és $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m\} \subset \mathbb{R}^m$ ortonormált bázisokat keresünk, melyekben \mathbf{A} mátrixa diagonálissá válik. Ez azt jelenti, hogy léteznek olyan σ_i valósok, hogy $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i\mathbf{u}_i$, ahol $1 \leq i \leq \min(m, n)$.

Á Ha $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ és az egymásra merőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vektorok legalább egyike az $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ Gram-mátrix sajátvektora, akkor az $\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ vektorok is merőlegesek egymásra.

B A feltételek szerint $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$, és legyen például $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}$.
Ekkor

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\mathbf{y} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^T\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (\lambda\mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = 0.$$

- komplexben: $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ sajátvektora,

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\mathbf{y} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^H\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{x}^H\mathbf{A}^H\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (\lambda\mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = 0.$$

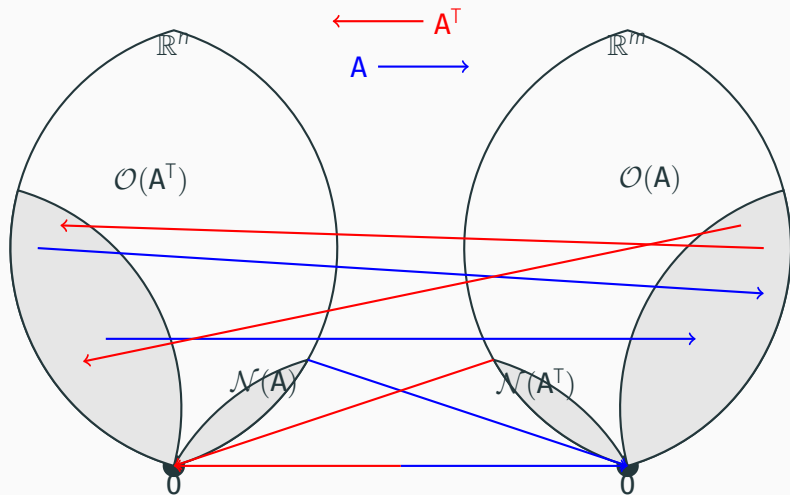
- $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ szimmetrikus és pozitív szemidefinit \rightsquigarrow ortogonálisan diagonalizálható, sajátértékei nem negatívak.
Komplexben: $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$, önadjungált, unitéren diag.
- A s.v.-okból kiválasztható \mathbb{R}^n egy ONB-a, a 0 s.é.-hez tartozók a $\mathcal{N}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = \mathcal{N}(\mathbf{A})$ tér ONB-át adják ($\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$ esetén a bázis \emptyset).
- a többi $\mathcal{N}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{O}(\mathbf{A}^T)$ ONB-a: $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$, ahol r az \mathbf{A} rangja
- ezek \mathbf{A} általi képei páronként merőlegesek egymásra \rightsquigarrow az $\mathbf{A} \mathbf{v}_i$ vektorok ortogonális bázist alkotnak az oszloptérben.
- ha \mathbf{v}_i az $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ mátrix $\lambda_i > 0$ sé-hez tartozó egységnyi sv-a, akkor $\|\mathbf{A} \mathbf{v}_i\| = \sqrt{\lambda_i}$, ui. $\|\mathbf{A} \mathbf{v}_i\|^2 = (\mathbf{A} \mathbf{v}_i)^T (\mathbf{A} \mathbf{v}_i) = \mathbf{v}_i^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{v}_i = \lambda_i \|\mathbf{v}_i\|^2 = \lambda_i$.
- L! $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, így $\mathbf{A} \mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i$, $\|\mathbf{u}_i\| = 1 \rightsquigarrow \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ ONB $\mathcal{O}(\mathbf{A})$ -ban
- $\mathbf{A} \mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i$, $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{v}_i = \sigma_i^2 \mathbf{v}_i \rightsquigarrow \mathbf{A}^T (\sigma_i \mathbf{u}_i) = \sigma_i^2 \mathbf{v}_i \rightsquigarrow$

$$\mathbf{A} \mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i, \mathbf{A}^T \mathbf{u}_i = \sigma_i \mathbf{v}_i$$

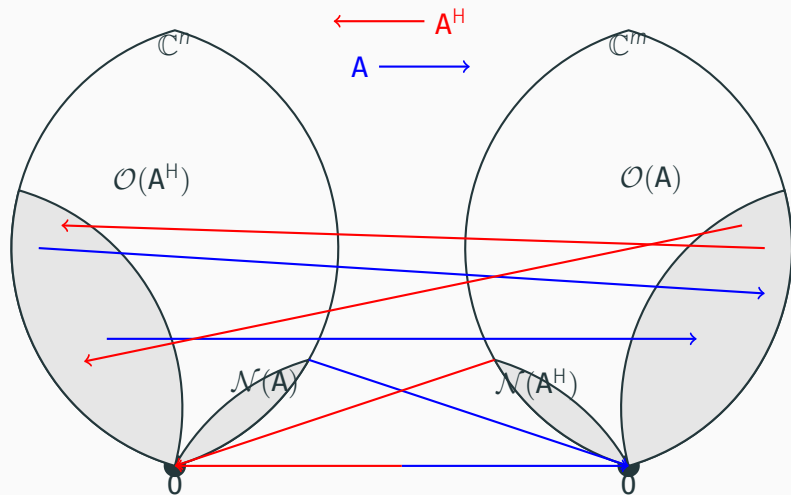
párba állítják a \mathbf{v}_i és \mathbf{u}_i vektorokat

- $\mathbf{v} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\mathbf{u} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^T)$, $\sigma = 0$: $\mathbf{A} \mathbf{v} = \sigma \mathbf{u}$, $\mathbf{A}^T \mathbf{u} = \sigma \mathbf{v}$

A négy kitüntetett altérben



A négy kitüntetett altérben



Szinguláris értékek és vektorok: $(\mathbf{u}, \sigma, \mathbf{v})$

- D Az r rangú $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ mátrix ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vagy \mathbb{C}) **szinguláris értékének** nevezzük azt a nemnegatív σ valóst, melyhez van olyan nemzérus $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$ és $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^m$ vektor, hogy $\boxed{\mathbf{A}\mathbf{v} = \sigma\mathbf{u}, \mathbf{A}^H\mathbf{u} = \sigma\mathbf{v}}$. A \mathbf{v} vektort **jobb**, az \mathbf{u} -t **bal szinguláris vektornak** nevezzük (ui. $\mathbf{u}^H\mathbf{A} = \sigma\mathbf{v}^H$).
- m A σ **multiplicitása** s : a σ -hoz tartozó jobb szinguláris vektorok \mathbb{K}^n -ben, és a σ -hoz tartozó bal szinguláris vektorok \mathbb{K}^m -ben a nullvektorral s -dimenziós alteret alkotnak.
- m $(\mathbf{u}, \sigma, \mathbf{v}), \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| = 1 \rightsquigarrow \|\mathbf{A}\mathbf{v}\| = \|\mathbf{A}^H\mathbf{u}\| = \sigma$.
- P $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \left\{ \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5} \right), \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right) \right\}, \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} = \left\{ \left(-\frac{5}{13}, \frac{12}{13} \right), \left(\frac{12}{13}, \frac{5}{13} \right) \right\}, \sigma_1 = 10, \sigma_2 = 5$

$$\begin{bmatrix} -4/13 & 6 \\ 111/13 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} -5/13 \\ 12/13 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -4/13 & 6 \\ 111/13 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 12/13 \\ 5/13 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} -4/13 & 111/13 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5/13 \\ 12/13 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -4/13 & 6 \\ 111/13 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 12/13 \\ 5/13 \end{bmatrix},$$

J Jelölések:

$$\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_1 = [\mathbf{u}_1 \mid \dots \mid \mathbf{u}_r]$$

$$\mathbf{V}_1 = [\mathbf{v}_1 \mid \dots \mid \mathbf{v}_r]$$

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i\mathbf{u}_i \rightsquigarrow \mathbf{A}\mathbf{V}_1 = \mathbf{U}_1\Sigma_1$$

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r \end{bmatrix}$$

$\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ és $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ kiterjesztése ONB-sá, majd

$$\mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{r+1} & \dots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{V} = [\mathbf{V}_1 \mid \mathbf{V}_2]$$

$$\mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{r+1} & \dots & \mathbf{u}_m \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = [\mathbf{U}_1 \mid \mathbf{U}_2]$$

V_2 oszlopvektorai $\perp \mathcal{O}(A^H) \rightsquigarrow r < i \leq n$ esetén $Av_i = \mathbf{0}$.

U_2 oszlopvektorai $\perp \mathcal{O}(A) \rightsquigarrow r < i \leq m$ esetén $A^H u_i = \mathbf{0}$.

$$AV = \left[Av_1 \quad \dots \quad Av_r \mid Av_{r+1} \quad \dots \quad Av_n \right]$$

$$= \left[\sigma_1 u_1 \quad \dots \quad \sigma_r u_r \mid \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0} \right]$$

$$= \left[\mathbf{u}_1 \quad \dots \quad \mathbf{u}_r \mid \mathbf{u}_{r+1} \quad \dots \quad \mathbf{u}_m \right] \left[\begin{array}{cccc|ccc} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right]$$

$$= U\Sigma,$$

azaz $A_{m \times n} V_{n \times n} = U_{m \times m} \Sigma_{m \times n}$, blokkmátrix alakban

$$A \left[\mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \right] = \left[\mathbf{u}_1 \mid \mathbf{u}_2 \right] \left[\begin{array}{c|c} \Sigma_1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right].$$

Szinguláris (érték szerinti) felbontás, SVD

V^H -tal jobbról szorozva ($VV^H = I$):

$$A = U\Sigma V^H = \left[\mathbf{U}_1 \mid \mathbf{U}_2 \right] \left[\begin{array}{c|c} \Sigma_1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{V}_1^H \\ \mathbf{V}_2^H \end{array} \right] = \mathbf{U}_1 \Sigma_1 \mathbf{V}_1^H$$

- D ! $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vagy \mathbb{C}). **Szinguláris érték szerinti felbontás**, vagy **szinguláris felbontás**: $A = U\Sigma V^H$, ahol U és V unitér (ortogonális) és Σ diagonális, monoton csökkenő nemnegatív elemekkel a főátlóban.
- **Redukált szinguláris felbontás**: $A = U_1 \Sigma_1 V_1^H$, ahol V_1 , U_1 szemiunitér (szemiortogonális) és Σ_1 négyzetes, diagonális, monoton csökkenő pozitív elemekkel a főátlóban.
 - **Szinguláris érték szerinti diadikus felbontás** vagy a **szinguláris felbontás diadikus alakja**: $A = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^H + \sigma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^H + \dots + \sigma_r \mathbf{u}_r \mathbf{v}_r^H$, ahol $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\} \subset \mathbb{K}^m$, $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\} \subset \mathbb{K}^n$ ONR, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$.

Példa a SVD három alakjára

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{bmatrix} \\ &= 6 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Szinguláris érték, SVD

Az SVD meghatározása

SVD meghatározása $A^H A$ -ból

$$m \quad A^H A = (U \Sigma V^H)^H U \Sigma V^H = V \Sigma^H U^H U \Sigma V^H = V \Sigma^H \Sigma V^H$$

Ez $A^H A$ sajátfelbontása: V unitér (ortogonális), $\Sigma^H \Sigma$ diagonális ($\sigma_i \geq 0$) \rightsquigarrow $A^H A$ sajátértékei épp a szinguláris értékek négyzetei, u_i . $\Sigma^H \Sigma = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_r^2, 0, \dots, 0)$.

SVD kiszámítása:

- 1 kiszámoljuk $A^H A$ poz.sé-eit ($\lambda_i > 0$) és sv-ai közül kiválasztunk egy ONR-t (ez $\mathcal{O}(A^H)$ ONB-a: $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^r$), ezek **jobb szinguláris vektorok**,
- 2 a sajátértékek gyökei a **szinguláris értékek** ($\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$),
- 3 **bal szinguláris vektorok**: mivel $A \mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i$, ezért $\mathbf{u}_i = A \mathbf{v}_i / \sigma_i$,
- 4 a szinguláris vektorokból fölírható V_1 és U_1 , a **redukált szinguláris felbontás** és a **diadikus alak**,
- 5 az $\mathcal{N}(A)$, illetve $\mathcal{N}(A^H)$ egy-egy tetszőleges ONB-ának vektoraival kiegészítve V_1 és U_1 oszlopait megkapjuk a V és U mátrixokat, és a **teljes SVD-t**.

Alternatíva $m < n$ esetére, ha a mátrix $m \times n$ -es

m ha $m < n$ lehet így is:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^H = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H(\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H)^H = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H\mathbf{V}\Sigma^H\mathbf{U}^H = \mathbf{U}\Sigma\Sigma^H\mathbf{U}^H$$

Ez $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$ sajátfelbontása: \mathbf{U} unitér (ortogonális), $\Sigma\Sigma^H$ diagonális ($\sigma_i \geq 0$) \rightsquigarrow $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$ sajátértékei épp a szinguláris értékek négyzetei, ui. $\Sigma\Sigma^H = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_r^2, 0, \dots, 0)$.

SVD kiszámítása:

- 1 meghatározzuk $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$ pozitív sajátértékeit ($\lambda_i > 0$) és sajátvektorai közül kiválasztunk egy ONR-t (\mathbf{u}_i), ezek **bal szinguláris vektorok**,
- 2 a sajátértékek gyökei a **szinguláris értékek** ($\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$),
- 3 $\mathbf{v}_i = \mathbf{A}^H\mathbf{u}_i/\sigma_i$, a **jobb szinguláris vektorok**
- 4 $\mathbf{V}_1, \mathbf{U}_1$, a redukált SVD és a diadikus alak felírása
- 5 a nullterek bázisaival kiegészítés ONB-sá, teljes SVD

P Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix szinguláris értékeit, vektorait, és felbontását.

M Kiszámítjuk az

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sajátértékeit és sajátvektorait.

- sajátértékek: $\lambda_{1,2} = 2$, $\lambda_3 = 0 \rightsquigarrow$
szinguláris értékek: $\sigma_{1,2} = \sqrt{2}$, $\sigma_3 = 0$.

- $A^T A$ sajátvektorai láthatóan lehetnek a standard bázis elemei:
 $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1, \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2, \mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_3$ (az xy -sík bármely két merőleges vektora lehetne).
- $\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} A \mathbf{v}_i$ képlettel:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- $\text{span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)^\perp$ meghatározása:

$$\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

- Innen az teljes és a redukált SVD:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Szinguláris érték, SVD

SVD-re vonatkozó állítások

- T** **A szinguláris értékek létezése és egyértelműsége:** Minden r -rangú komplex vagy valós \mathbf{A} mátrixnak létezik r (pozitív) szinguláris értéke, melyek monoton csökkenő sorozata egyértelmű.
- m** Általában a sajátértékek és a szinguláris értékek négyzetes mátrixok esetén is különböznek. Például az

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékei 1, 0, míg szinguláris értékei $\sqrt{2}$, 0.

- Á** Normális mátrix szinguláris értékei a sajátértékeinek abszolút értékeivel egyeznek meg.
- B** Ha normális, akkor unitéren diagonalizálható \rightsquigarrow
 $\mathbf{A}^H \mathbf{A} = (\mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^H)^H \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^H = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda}^H \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^H$, tehát $\sigma_i^2 = \lambda_i \bar{\lambda}_i$, azaz $\sigma_i = |\lambda_i|$.
- Á** Ha \mathbf{A} pozitív szemidefinit, akkor sajátértékei megegyeznek szinguláris értékeivel, és sajátfelbontása szinguláris felbontása is (ha a sajátértékeket csökkenő sorrendben tettük a $\mathbf{\Lambda}$ mátrixba).
- B** $\mathbf{A} = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^T$: $\mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbf{Q}$, $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Lambda}$.

- m Ha \mathbf{A} szimmetrikus (önadjungált), akkor sajátfelbontásából megkapható: legyenek Λ -ban a sajátértékek abszolútértékük szerint monoton csökkenő sorrendben, és képezzük \mathbf{E} -t az \mathbf{I} -ből úgy, hogy a Λ -beli negatív sajátértékek helyén \mathbf{E} -ben -1 legyen. Ekkor a sajátfelbontásból az $\mathbf{U} = \mathbf{QE}$, $\Sigma = \mathbf{E}\Lambda$ és $\mathbf{V} = \mathbf{Q}$ helyettesítéssel szinguláris felbontást kapunk:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^T = \mathbf{QE}\mathbf{E}\Lambda\mathbf{Q}^T = (\mathbf{QE})(\mathbf{E}\Lambda)\mathbf{Q}^T = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T.$$

(\mathbf{QE} a \mathbf{Q} oszlopait szorozza -1 -gyel)

- P Egy szimmetrikus mátrix saját- és szinguláris felbontása:

$$\begin{bmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{bmatrix} = \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{bmatrix} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

Szinguláris érték, SVD

Geometriai interpretáció

SVD és báziscsere

\mathbb{R}^n standard bázisa \mathcal{E}_1 , másik bázisa $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$

\mathbb{R}^m standard bázisa \mathcal{E}_2 , másik bázisa $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$

$$\begin{array}{ccc} [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}_1} & \xrightarrow{\Sigma_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1}} & [\Sigma \mathbf{x}]_{\mathcal{B}_2} \\ \downarrow \mathbf{V}_{\mathcal{E}_1 \leftarrow \mathcal{B}_1} & & \downarrow \mathbf{U}_{\mathcal{E}_2 \leftarrow \mathcal{B}_2} \\ [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}_1} & \xrightarrow{\mathbf{A}_{\mathcal{E}_2 \leftarrow \mathcal{E}_1}} & [\mathbf{A} \mathbf{x}]_{\mathcal{E}_2} \end{array}$$

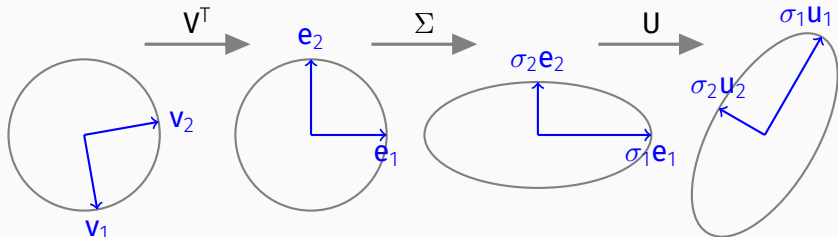
$$\begin{aligned} [\mathbf{A} \mathbf{x}]_{\mathcal{E}_2} &= \mathbf{A}_{\mathcal{E}_2 \leftarrow \mathcal{E}_1} [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}_1} \\ &= \mathbf{U}_{\mathcal{E}_2 \leftarrow \mathcal{B}_2} \Sigma_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1} \mathbf{V}_{\mathcal{B}_1 \leftarrow \mathcal{E}_1}^{-1} [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}_1} \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^T \\ &= \mathbf{U}_{\mathcal{E}_2 \leftarrow \mathcal{B}_2} \Sigma_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1} \mathbf{V}_{\mathcal{B}_1 \leftarrow \mathcal{E}_1}^T [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}_1} \end{aligned}$$

P SVD hatása egységkörön 2-rangú 2×2 -es mátrixszal:

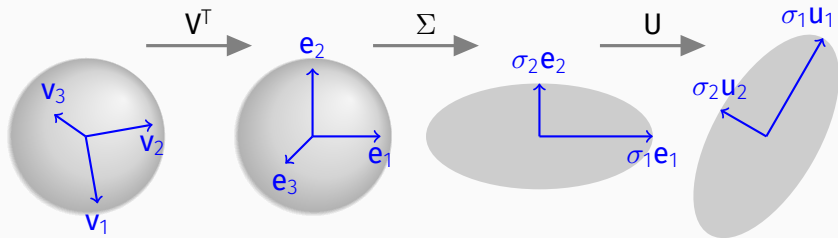
$$\mathbf{V}^T \mathbf{v}_i = \mathbf{e}_i, \quad \Sigma \mathbf{e}_i = \sigma_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{U} \sigma_i \mathbf{e}_i = \sigma_i \mathbf{U} \mathbf{e}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i, \quad (i = 1, 2)$$

azaz \mathbf{V}^T a $\{\mathbf{v}_i\}$ bázist a standardba viszi ortogonális leképezéssel (forgatás vagy tükrözés), ott Σ tengelyirányban nyújt/összenyom, végül az ortogonális \mathbf{U} hat rá.

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^T : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^T \mathbf{x} :$$



P 2×3 -as, valós, 2-rangú mátrix: \mathbf{V}^T ort. $\rightsquigarrow \mathbf{V}^T \mathbf{v}_i = \mathbf{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$).



- Σ a két első tengely irányában nyújt/összenyom: $\Sigma \mathbf{e}_i = \sigma_i \mathbf{e}_i$ ($i = 1, 2$), a harmadik tengely irányban vetít: $\Sigma \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$.
- A kép nem egy ellipszisvonal, hanem ellipszistartomány.
- Végül az ortogonális \mathbf{U} ezt elforgatja vagy tükrözi egy egyenesre.

$$\mathbf{A}_{2 \times 3} = \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^T : \mathbf{x}_{3 \times 1} \mapsto \mathbf{U}_{2 \times 2} \Sigma_{2 \times 3} \mathbf{V}_{3 \times 3}^T \mathbf{x}_{3 \times 1}$$

$$= [\mathbf{u}_1 \mid \mathbf{u}_2] \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{v}_1}{\sigma_1} \\ \frac{\mathbf{v}_2}{\sigma_2} \\ \frac{\mathbf{v}_3}{\sigma_3} \end{bmatrix} \mathbf{x}_{3 \times 1}$$

- T \mathbf{A} egy r -rangú, $m \times n$ -es valós mátrix. Az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ leképezés \mathbb{R}^n az $\mathbf{e}^T \mathbf{e} = 1$ egyenletet kielégítő, egységgömb felületén lévő pontjait, \mathbb{R}^m egy r -dimenziós altere
- egy ellipszoidjának felületére képi, ha $r = n$, és
 - egy ellipszoidja által határolt tartományára képi, ha $r < n$.

Szinguláris érték, SVD

Polárfelbontás, pszeudoinvert

- m $re^{i\varphi}$: egy nemnegatív nyújtási tényező (r) és egy egységnyi abszolút értékű komplex szám ($e^{i\varphi}$, ami a komplex síkon φ -vel való forgatás) szorzata.
- D **Polárfelbontáson** egy négyzetes mátrixnak egy pozitív szemidefinit és egy ortogonális mátrix szorzatára való felbontását értjük.
- T Bármely komplex (valós) négyzetes \mathbf{A} mátrix előáll

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{Q}$$

alakban, ahol \mathbf{P} pozitív szemidefinit önadjungált (szimmetrikus) mátrix, \mathbf{Q} pedig unitér (ortogonális). Ha \mathbf{A} invertálható, akkor \mathbf{P} pozitív definit, és a felbontás egyértelmű.

B $\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{U}^H\mathbf{U}\mathbf{V}^H = (\mathbf{U}\Sigma\mathbf{U}^H)(\mathbf{U}\mathbf{V}^H)$, ahonnan $\mathbf{P} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{U}^H$,
 $\mathbf{Q} = \mathbf{U}\mathbf{V}^H$.

\mathbf{P} önadjungált, hisz $(\mathbf{U}\Sigma\mathbf{U}^H)^H = \mathbf{U}\Sigma^H\mathbf{U}^H = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{U}^H$.

\mathbf{A} \mathbf{P} pozitív szemidefinit, hisz hasonló a pozitív szemidefinit Σ mátrixhoz (ha \mathbf{A} invertálható, akkor Σ pozitív definit)

\mathbf{Q} unitér (ortogonális), hisz két unitér (ortogonális) mátrix szorzata.

\mathbf{A} \mathbf{P} egyértelmű (nem csak akkor, ha pozitív definit), ugyanis

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^H = \mathbf{P}\mathbf{Q}\mathbf{Q}^H\mathbf{P}^H = \mathbf{P}\mathbf{P}^H = \mathbf{P}^2,$$

azaz $\mathbf{P} = \sqrt{\mathbf{A}\mathbf{A}^H}$, és pozitív szemidefinit önadjungált mátrix négyzetgyöke egyértelmű az önadjungált pozitív szemidefinit mátrixok körében.

Ha \mathbf{P} pozitív definit, akkor invertálható, így $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}$ is egyértelmű.

- analógia a determinánsoknál is: $\det \mathbf{P} = r$, $\det \mathbf{Q} = e^{i\varphi}$ (hisz \mathbf{Q} unitér), $\det \mathbf{A} = re^{i\varphi}$.
- Fordított sorrend: azonos unitér (ortogonális) mátrixszal:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H = \mathbf{U}\mathbf{V}^H\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H = (\mathbf{U}\mathbf{V}^H)(\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H) = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{P}},$$

- Valós polárfelbontás geometriai jelentése: minden mátrixleképezés két olyan leképezés kompozíciója, amelyekből az egyik forgatja vagy forgatva tükrözi a teret (\mathbf{Q}), a másik pedig egy ortonormált bázis tengelyei mentén nyújtja/összenyomja a teret minden tengelyirányban egy-egy nemnegatív tényezővel.

P Polárfelbontásait számítsuk ki

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

B $\mathbf{P} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{U}^T$, $\mathbf{Q} = \mathbf{U}\mathbf{V}^T$, $\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{V}\Sigma\mathbf{V}^T$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{Q} &= \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4/9 & -8/9 & 1/9 \\ -4/9 & 1/9 & -8/9 \\ 7/9 & -4/9 & -4/9 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{Q}\hat{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} -4/9 & -8/9 & 1/9 \\ -4/9 & 1/9 & -8/9 \\ 7/9 & -4/9 & -4/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

T SVD: $\mathbf{A} = \mathbf{U}_1 \Sigma_1 \mathbf{V}_1^H$, illetve $\mathbf{A} = \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^H$. Ekkor

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}_1 \Sigma_1^{-1} \mathbf{U}_1^H = \mathbf{V} \Sigma^+ \mathbf{U}^H.$$

B \mathbf{U}_1 teljes oszloprangú, $\Sigma_1 \mathbf{V}_1^H$ teljes sorrangú, így

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^+ &= (\Sigma_1 \mathbf{V}_1^H)^H (\Sigma_1 \mathbf{V}_1^H (\Sigma_1 \mathbf{V}_1^H)^H)^{-1} (\mathbf{U}_1^H \mathbf{U}_1)^{-1} \mathbf{U}_1^H = \mathbf{V}_1 \Sigma_1 \Sigma_1^{-2} \mathbf{U}_1^H \\ &= \mathbf{V}_1 \Sigma_1^{-1} \mathbf{U}_1^H. \end{aligned}$$

Ebből

$$\mathbf{V} \Sigma^+ \mathbf{U}^H = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1^H \\ \mathbf{U}_2^H \end{bmatrix} = \mathbf{V}_1 \Sigma_1^{-1} \mathbf{U}_1^H.$$

Norma

Norma

Vektornorma

D Az \mathbf{x} vektor **euklideszi normája** vagy más néven abszolút értéke

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}, \quad \text{ha } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \sqrt{\mathbf{x}^H \mathbf{x}}, \quad \text{ha } \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n.$$

m Manhattan ($|x| + |y|$), képméretezés ($\max\{|x|, |y|\}$).

D A $p \geq 1$ valósra az $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ vektor **p -normája** $\|\mathbf{x}\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$,
míg ennek határértéke a ∞ -norma, azaz $\|\mathbf{x}\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}\|_p$.

- m 1-norma = rácsnorma = Manhattan-norma
maximum norma = ∞ -norma

$$\|\mathbf{x}\|_{\infty} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}\|_p = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} = \max_i |x_i|.$$

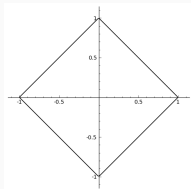
- B* a legnagyobb abszolút értékű koordináta x_{\max} ($|x_i|/|x_{\max}| \leq 1$)

$$1 \leq \sum_{i=1}^n |x_i/x_{\max}|^p \leq n.$$

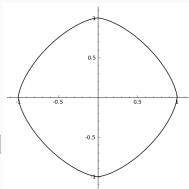
Mindegyik kifejezést $1/p$ -edik hatványra emelve, majd $|x_{\max}|$ -szal beszorozva kapjuk, hogy

$$|x_{\max}| \leq |x_{\max}| \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i}{x_{\max}} \right|^p \right)^{1/p} \leq |x_{\max}| n^{1/p},$$

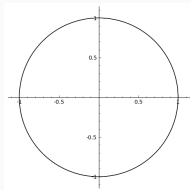
Egységkörök különböző normákban



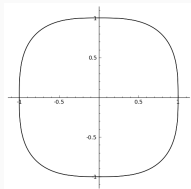
$$p = 1$$



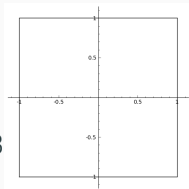
$$p = \frac{3}{2}$$



$$p = 2$$



$$p = 3$$



$$p = \infty$$

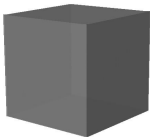
Egységgömbök különböző normákban



$$p = 1$$



$$p = 2$$



$$p = \infty$$

A vektornorma általános fogalma

Á Az előző normák alaptulajdonságai:

- $\|\mathbf{x}\| \geq 0$
- $\|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$ (\rightsquigarrow a $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ távolságfüggvény **szeparálja a pontokat**, azaz két különböző pont távolsága sosem 0)
- $\|c\mathbf{x}\| = |c|\|\mathbf{x}\|$ (**pozitív homogenitás**)
- $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (**háromszögegyenlőtlenség**)

D Az $f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) függvény **norma**, ha minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{K}^n$ vektorra és minden $c \in \mathbb{K}$ konstansra

- $f(\mathbf{x}) \geq 0$, és $f(\mathbf{x}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$,
- $f(c\mathbf{x}) = |c|f(\mathbf{x})$,
- $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$.

A norma néhány tulajdonsága

m $\|\mathbf{x}\| = \|-\mathbf{x}\|$ bármely $\|\cdot\|$ normára igaz, hisz
 $\|-\mathbf{x}\| = |-1| \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$.

T A háromszögegyenlőtlenség p -normánál:

Minkowski-egyenlőtlenség: $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p \leq \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p$.

T A **Hölder-egyenlőtlenség** a CBS-egyenlőtlenség általánosítása:

$$|\mathbf{x}^H \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q, \text{ ahol } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Á Minden norma folytonos függvény.

m Ha $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$ egy norma, és A egy egy-egy értelmű lineáris leképezés, akkor az $\mathbf{x} \mapsto \|A\mathbf{x}\|$ leképezés is norma és a következő is

$$\mathbf{x} \mapsto \sup_{\mathbf{y} \neq \mathbf{0}} \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|}$$

Vektornormák ekvivalenciája

m $\max_i \{|x_i|\} \leq \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} \leq |x_1| + \dots + |x_n|$ azaz

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1.$$

m Másrészt

$$\|\mathbf{x}\|_1 \leq \sqrt{n} \|\mathbf{x}\|_2, \quad \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{n} \|\mathbf{x}\|_\infty \quad \text{és} \quad \|\mathbf{x}\|_1 \leq n \|\mathbf{x}\|_\infty.$$

D A $\|\cdot\|_a$ és $\|\cdot\|_b$ normák **ekvivalensek**, ha van olyan c és d pozitív valós szám, hogy $\|\cdot\|_a \leq c \|\cdot\|_b$ és $\|\cdot\|_b \leq d \|\cdot\|_a$.

m Az 1-, 2- és ∞ -normák ekvivalensek

T Legyen $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. A \mathbb{K}^n téren értelmezett **bármely két norma ekvivalens**.

m Ez **csak véges dimenziós terekben** igaz, itt tehát a konvergenciakérdésekhez bármelyik norma jó.

Norma

Vektornorma mátrixokon

Frobenius-norma

D Az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ mátrix Frobenius-normája

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \|\mathbf{A}_{i*}\|_2^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^n \|\mathbf{A}_{*j}\|_2^2}.$$

T Frobenius-norma ekvivalens alakjai:

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\text{trace}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\min(m,n)} \sigma_i^2}.$$

B $[\mathbf{A}^H \mathbf{A}]_{jj} = \|\mathbf{A}_{*j}\|_2^2$

nyom = sajátértékek összege

Á Bármely $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ vektorra és $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ mátrixra $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{A}\|_F \|\mathbf{x}\|_2$.

B Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenségből:

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |\mathbf{A}_{i*} \mathbf{x}|^2 \leq \sum_{i=1}^n \|\mathbf{A}_{i*}\|_2^2 \|\mathbf{x}\|_2^2 = \|\mathbf{A}\|_F^2 \|\mathbf{x}\|_2^2.$$

Norma

A mátrixnorma általános fogalma

- D $\|\cdot\| : \mathbb{K}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ **mátrixnorma**, ha $\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{K}^{m \times n}, \mathbf{C} \in \mathbb{K}^{n \times k}, c \in \mathbb{K}$:
- $\|\mathbf{A}\| \geq 0$, és $\|\mathbf{A}\| = 0$ pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{A} = \mathbf{O}$,
 - $\|c\mathbf{A}\| = |c| \|\mathbf{A}\|$,
 - $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$,
 - $\|\mathbf{AC}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{C}\|$.

D $\|\cdot\|$ egy tetszőleges vektornorma. Ekkor az

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{Ax}\| \quad \left(= \sup_{\|\mathbf{x}\| \neq 0} \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \max_{\|\mathbf{x}\| \neq 0} \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|} \right)$$

a vektornorma által **indukált mátrixnorma**.

D p -norma mátrixokra:

$$\|\mathbf{A}\|_p = \max_{\|\mathbf{x}\|_p=1} \|\mathbf{Ax}\|_p$$

- D Ha lineáris leképezésre értelmezzük, **operátornormáról** beszélünk.
- m Normák ekvivalenciája \rightsquigarrow az egységgömb korlátos és zárt bármely normában $\rightsquigarrow \mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{Ax}\|$ függvénynek van maximuma és minimuma

T Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, ekkor

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \text{legnagyobb abszolút oszlopösszeg,}$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^m |a_{ij}| = \text{legnagyobb abszolút sorösszeg,}$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \|\mathbf{A}^H\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \max_{\|\mathbf{y}\|_2=1} |\mathbf{y}^H \mathbf{A} \mathbf{x}| = \sigma_1,$$

Ha az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertálható, akkor

$$\|\mathbf{A}^{-1}\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \frac{1}{\|\mathbf{A} \mathbf{x}\|_2} = \frac{1}{\min_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|\mathbf{A} \mathbf{x}\|_2} = \frac{1}{\sigma_n},$$

ahol σ_n az \mathbf{A} legkisebb szinguláris értéke.

m a legkisebb pontosan akkor pozitív, ha \mathbf{A} invertálható

m Az 1-, a ∞ - és a 2-normára szokásos másik elnevezés:

oszlopnorma, sornorma és spektrálnorma.

Mátrix érzékenysége invertálásra – kondíciószám

P Az alábbi egyenletrendszer konstansait 0.01-dal megváltoztatjuk:

$$6.73x - 8.97y = 5.61$$

$$4.79x - 6.39y = 3.99$$

- A megoldás: $x = 1.5, y = 0.5$
6.73 \rightarrow 6.72 $x \approx -2.26, y \approx -2.32$
-8.97 \rightarrow -8.96 $x \approx 4.35, y \approx 2.64$
5.61 \rightarrow 5.60 $x = 1.5, y = 0.5$
4.79 \rightarrow 4.80, 6.39 \rightarrow 6.40 inkonz., opt. sort.: 0.2998, -0.3997
3.99 \rightarrow 4.00 ∞ sok mo. (sortérbe 0.3, -0.4)
- Az együtthatómátrixra $\sigma_1 = 13.767, \sigma_2 = 0.002789, \sigma_1/\sigma_2 = 4935.7$.
- D Egy $\mathbf{A}_{n \times n}$ mátrix **kondíciószáma** $\text{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| = \sigma_1/\sigma_n$.
- Ha e szám nagy, a mátrix és az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ rosszul kondicionált.
- Nem invertálható mátrixra ez ∞ , ortogonális/unitér mátrixra 1.

Norma

Kis rangú approximáció

Kis rangú approximáció tétele – Eckart–Young-tétel

T A r -rangú, szinguláris érték szerinti felbontásának diadikus alakja

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^r \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T,$$

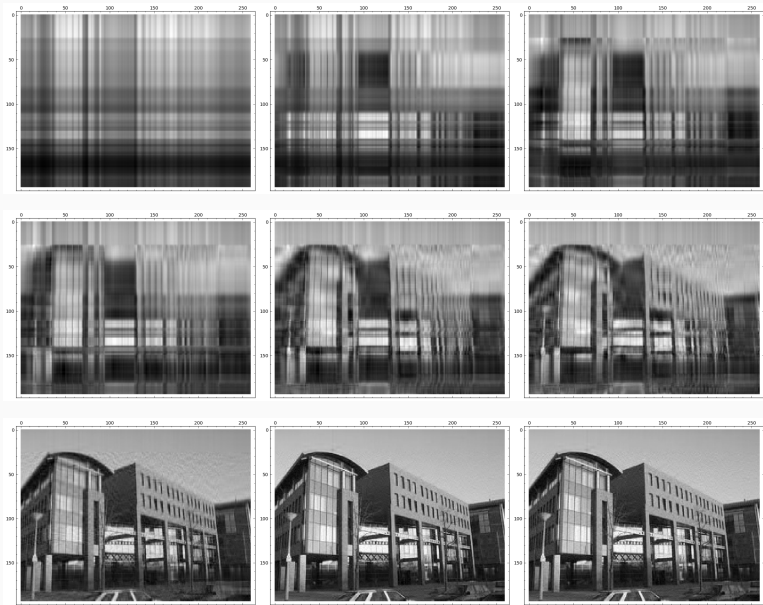
és legyen

$$\mathbf{A}_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T \quad (k = 1, 2, \dots, r).$$

Ekkor \mathbf{A}_k az \mathbf{A} mátrix legjobb legfölbbebb k -rangú közelítése, azaz

$$\min_{r(\mathbf{B}) \leq k} \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_F = \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_k\|_F = \sqrt{\sum_{i=k+1}^r \sigma_i^2},$$

$$\min_{r(\mathbf{B}) \leq k} \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_2 = \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_k\|_2 = \sigma_{k+1}.$$



1, 2, 3, 4, 8, 12, 40, 97, 194.

