BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

Haladó lineáris algebra

BMETE90MX54 (FELSŐBB MATEMATIKA VILLAMOSMÉRNÖKÖKNEK)

Eulideszi tér, merőlegesség

ORTOGONALIZÁCIÓ, MERŐLEGES VETÍTÉS, LEGKISEBB NÉGYZETEK

Wettl Ferenc

ALGEBRA TANSZÉK

Tartalomjegyzék

Ismeretek, képességek, célok

- fel tudja írni egy független vektorrendszer Gram-mátrixát,
- ki tudja számítani vektor altérre eső merőleges vetületét az altér tetszőleges vagy ortonormált bázisa segítségével is,
- felismeri a vetítőmátrixot, és a merőleges vetítés mátrixát,
- ki tudja számítani egyenletrendszer optimális megoldásait és minimális abszolút értékű optimális megoldását,
- ki tudja számítani mátrix pszeudoinverzét, és azzal lineáris egyenletrendszer legkisebb abszolút értékű optimális megoldását,
- bázisával megadott altérben talál ortonormált bázist (komplexben is),
- felismeri a szemiortogonális, ortogonális, unitér mátrixokat, és az ortogonális trafókat geometriai tulajdonságaik alapján,
- jellemezni tudja a 2- és 3-dimenziós terek ortogonális transzformációit,
- ki tudja számítani mátrix QR-felbontását, és annak segítségével lineáris egyenletrendszer optimális megoldását.

Merőleges vetítés

Vetítés

D $\mathcal{U} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$, így bármely $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ egyértelműen előáll $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ alakban, ahol $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$. A $\mathbf{v}$ vektor az $\mathbf{u}$ vektornak a $\mathcal{V}$ altérre $\mathcal{W}$ mentén való (vele párhuzamosan vett) vetülete.

D E lineáris transzformációt vetítésnek vagy projekciónak nevezzük.

m minden P vetítés az $\operatorname{Im} P$-re $\operatorname{Ker} P$ mentén való vetítés.

Á Mátrixa: $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{V}$ bázisa $\{\, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \,\}$, $\mathcal{W}$ bázisa $\{\, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-r} \,\}$. Legyen

$$\mathbf{U} = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \dots\ \mathbf{v}_r | \mathbf{w}_1\ \mathbf{w}_2\ \dots\ \mathbf{w}_{n-r}] = [\mathbf{V}|\mathbf{W}].$$

Mivel $P\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i$ $(i = 1, 2, \dots, r)$ és $P\mathbf{w}_j = \mathbf{0}$ $(j = 1, 2, \dots, n-r)$, ezért a P leképezés $\mathbf{P}$ mátrixára

$$\mathbf{PU} = \mathbf{P}[\mathbf{V}|\mathbf{W}] = [\mathbf{PV}|\mathbf{PW}] = [\mathbf{V}|\mathbf{O}].$$

$\mathbf{U}$ invertálható, ezért

$$\mathbf{P} = [\mathbf{V}|\mathbf{O}]\mathbf{U}^{-1} = [\mathbf{V}|\mathbf{O}][\mathbf{V}|\mathbf{W}]^{-1}.$$

Vetítés

T A projekció tulajdonságai: Legyen $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ egy projekció.

1. $\mathbb{R}^n$-nek van olyan bázisa, melyben a mátrixa $\mathsf{P} = \operatorname{diag}(1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$.
2. $I - P$ is projekció: $\operatorname{Ker}(I - P) = \operatorname{Im} P$, $\operatorname{Im}(I - P) = \operatorname{Ker} P$,
3. $\operatorname{r}(P) = \operatorname{trace}(\mathsf{P})$.

Vetítőmátrix felírása

P Írjuk fel annak a P vetítésnek a PP mátrixát, mely az $\mathcal{V} = \mathrm{span}((1,1,0,0),(0,0,1,1)) \leqslant \mathbb{R}^4$ térre vetít a $\mathcal{W} = \mathrm{span}((1,0,1,0),(0,1,1,0)) \leqslant \mathbb{R}^4$ tér mentén, és annak a $\hat{P}$ vetítének a $\hat{\mathsf{P}}$ mátrixát, mely $\mathcal{V}$ mentén $\mathcal{W}$-re vetít!

M A négy vektor független (mátrixuk determinánsa nem 0), és $P(\mathcal{V}) = \mathcal{V}$, $P(\mathcal{W}) = \{\mathbf{0}\}$, így

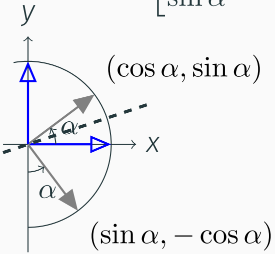
$$\mathsf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Hasonlóan megkapható $\hat{\mathsf{P}}$, de egyszerűbb:

$$\hat{\mathsf{P}} = \mathsf{I} - \mathsf{P} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Merőleges vetítés és tükrözés

- Egyenesre való merőleges vetítés mátrixa $\mathbf{P} = \frac{1}{\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{b}}\mathbf{b}\mathbf{b}^\mathsf{T}$ ($\mathbf{P} = \mathbf{e}\mathbf{e}^\mathsf{T}$).
- Síkra való merőleges vetítés mátrixa $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}^\mathsf{T}$.
- Síkra való tükrözés mátrixa $\mathbf{P} = \mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^\mathsf{T}$.
- Síkbeli tükrözés mátrixa az x-tengellyel $\alpha/2$ szöget bezáró egyenesre: $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$.



Merőleges vetítés $\mathbb{R}^n$ egy alterére

T Ha $\mathcal{W}$ az $\mathbb{R}^n$ egy altere, és az A mátrix oszlopvektorai a $\mathcal{W}$ egy bázisát alkotják (A teljes oszloprangú), akkor a $\mathcal{W}$ altérre való merőleges vetítés, azaz a $\mathbf{proj}_{\mathcal{W}}$ leképezés mátrixa $\boxed{\mathsf{A}(\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A})^{-1}\mathsf{A}^\mathsf{T}}$.

B* Legyen a $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektor $\mathcal{W}$-re eső merőleges vetülete $\mathbf{w}$.
A oszloptere $\mathcal{W}$, ezért létezik olyan $\mathbf{x}$ vektor, hogy $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{w}$.
$\mathcal{W} = \mathcal{O}(\mathsf{A})$, így $\mathcal{W}^\perp = \mathcal{N}(\mathsf{A}^\mathsf{T})$, tehát $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ benne van A^T nullterében.
Eszerint $\mathsf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{0}$, azaz $\mathsf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{v} - \mathsf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, innen

$$\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathsf{A}^\mathsf{T}\mathbf{v}.$$

Az A mátrix teljes oszloprangú, így $\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}$ invertálható, azaz $\mathbf{x} = (\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A})^{-1}\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathbf{v}$, amiből $\mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{v} = \mathbf{w} = \mathsf{A}\mathbf{x} = \mathsf{A}(\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A})^{-1}\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathbf{v}$.

m Ha $\mathsf{A} = \mathbf{b}$ egy oszlopvektor ($\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$), akkor $\mathsf{A}(\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A})^{-1}\mathsf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{b}(\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{b})^{-1}\mathbf{b}^\mathsf{T} = \frac{1}{\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{b}}\mathbf{b}\mathbf{b}^\mathsf{T}$.

Melyik mátrix merőleges vetítés mátrixa?

T Egy $\mathbf{P}$ mátrix pontosan akkor vetítés mátrixa, ha

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P},$$

és pontosan akkor merőleges vetítés mátrixa, ha

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^\mathsf{T} = \mathbf{P}^2.$$

B* $(\Rightarrow)$ $\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}$

$$\mathbf{P}^2 = \left(\mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)^2 = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{P},$$

$$\mathbf{P}^\mathsf{T} = \left(\mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)^\mathsf{T} = \mathbf{A}\left((\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\right)^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{P}.$$

$(\Leftarrow)$ Tfh $\mathbf{P} = \mathbf{P}^\mathsf{T} = \mathbf{P}^2$.
A $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ feltétel miatt $\mathbf{P}(\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x}) = \mathbf{P}\mathbf{x} - \mathbf{P}^2\mathbf{x} = \mathbf{0}$, tehát
$\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{P})$, de $\mathbf{P} = \mathbf{P}^\mathsf{T}$, így $\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{P}^\mathsf{T})$.
Eszerint $\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x}$ merőleges $\mathcal{O}(\mathbf{P})$-re, és ezt akartuk belátni.

Merőleges vetítés absztrakt tér egy alterére, Gram-mátrix

D A $\mathcal{V}$ euklideszi tér független $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektorainak Gram-mátrixa: a

$$\mathbf{G}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k) = [\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle] = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle & \ldots & \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_k \rangle \\ \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle & \ldots & \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_k \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_2 \rangle & \ldots & \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k \rangle \end{bmatrix}$$

T Merőleges vetület kiszámítása L! $\mathcal{V}$ egy euklideszi tér, $\mathcal{W}$ egy végesdimenziós altere, melynek $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ egy bázisa, $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$. Ekkor

$$\mathbf{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots c_k\mathbf{v}_k,$$

ahol a $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_k)$ vektor a $\mathbf{Gc} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldása, $\mathbf{G}$ a $\mathcal{B}$ vektoraihoz tartozó Gram-mátrix, és $[\mathbf{b}]_i = \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v} \rangle$.

Merőleges vetület kiszámítása Gram-mátrixszal

P L! $\mathcal{V} = \mathbb{R}[x]$ a valós együtthatós polinomok euklideszi tere a

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,\mathrm{d}x,$$

skaláris szorzással és L! $\mathcal{W} = \operatorname{span}(1, x, x^2) \leqslant \mathcal{V}$. Kérdés:

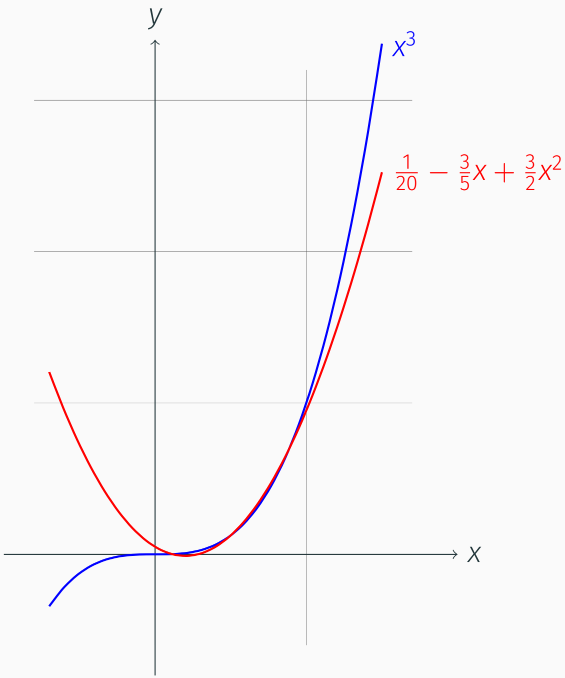
$$\mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\, x^3 = ?$$

M Az x^3 polinom vetülete $\mathcal{W}$-re $c_1 + c_2 x + c_3 x^2$ alakú. Az ismeretlen c_i együtthatókra

$$\begin{bmatrix} \langle 1,1\rangle & \langle 1,x\rangle & \langle 1,x^2\rangle \\ \langle x,1\rangle & \langle x,x\rangle & \langle x,x^2\rangle \\ \langle x^2,1\rangle & \langle x^2,x\rangle & \langle x^2,x^2\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle 1,x^3\rangle \\ \langle x,x^3\rangle \\ \langle x^2,x^3\rangle \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$\rightsquigarrow (c_1, c_2, c_3) = (1/20, -3/5, 3/2)$, azaz x^3 merőleges vetülete

$$\frac{1}{20} - \frac{3}{5}x + \frac{3}{2}x^2.$$


y
x^3
$\frac{1}{20} - \frac{3}{5}x + \frac{3}{2}x^2$
x

Legjobb közelítés

Altértől való távolság

D $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{W} \leqslant \mathbb{R}^n$ altér. $\mathbf{x}$-nek a $\mathcal{W}$ altértől való távolságán a $\mathcal{W}$ altér $\mathbf{x}$-hez legközelebbi $\mathbf{w}$ vektorának tőle való távolságát értjük.

T Legjobb közelítés tétele: Az $\mathbf{x}$ vektornak egyetlen $\mathcal{W}$-beli legjobb $\hat{\mathbf{x}}$ közelítése van, nevezetesen $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{x}$.

B $\mathbf{x} - \mathbf{w} = (\mathbf{x} - \mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{x}) + (\mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{x} - \mathbf{w})$.

első kifejezés $\mathcal{W}^{\perp}$, a második $\mathcal{W}$ eleme!

$(\mathbf{x} - \mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{x}) \perp (\mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{x} - \mathbf{w})$

Pithagorász: $|\mathbf{x} - \mathbf{w}|^2 = |\mathbf{x} - \mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{x}|^2 + |\,\mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{x} - \mathbf{w}|^2$.

$\rightsquigarrow |\mathbf{x} - \mathbf{w}|^2 \geq |\mathbf{x} - \mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{x}|^2$

egyenlőség csak akkor állhat fönn, ha $\mathbf{w} = \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{x}$

K $\mathbb{R}^n = \mathcal{W} \oplus \mathcal{W}^{\perp}$.

Altértől való távolság

P Bontsuk fel az $\mathsf{x} = (8, 4, 2, 1)$ vektort $\mathcal{W} = \operatorname{span}((1, -1, 1, 0), (0, 1, -1, 0))$-be eső és $\mathcal{W}$-re merőleges vektorok összegére.

M A $\mathcal{W}$-re való merőleges vetítés mátrixa $\mathsf{P} = \mathsf{W}(\mathsf{W}^\mathsf{T}\mathsf{W})^{-1}\mathsf{W}^\mathsf{T}$, ahol W két oszlopa a megadott két bázisvektor:

$$\mathsf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{amiből} \quad \mathsf{Px} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$\mathsf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathsf{x} = \mathsf{Px} = (8, 1, -1, 0)$ és $\mathsf{x} - \mathsf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathsf{x} = (0, 3, 3, 1)$.

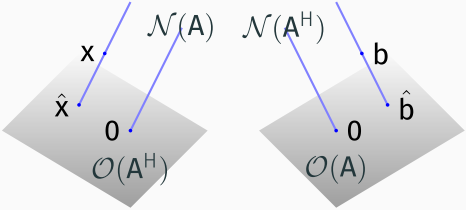
Egyenletrendszer optimális megoldása

D Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ optimális megoldásain az $\mathbf{Ax} = \mathbf{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})}\,\mathbf{b}$ megoldásait értjük.

T Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer optimális megoldásai megegyeznek az

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$$

egyenletrendszer megoldásaival (normálegyenlet-rendszer). Ezek közül egyetlen egy esik az $\mathbf{A}$ mátrix sorterébe, a legkisebb abszolút értékű.



T Az (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \ldots n)$ párokhoz tartozó, $y = \hat{a} + \hat{b}x$ egyenletű regressziós egyenes paraméterei kielégítik az alábbi egyenletet, mely egyértelműen megoldható, ha van legalább két különböző x_i érték.

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$$

B Megoldandó:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

A hozzá tartozó normálegyenlet-rendszer

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

D Polinomiális regresszióról beszélünk, ha az $y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$ egyenlet a_i együtthatóira keresünk optimális becslést a legkisebb négyzetek módszerével, ismert (x_i, y_i) párok sorozata mellett, ahol $i = 1, 2, \ldots n$.

m Keresendő az n egyenletből álló $k+1$-ismeretlenes

$$
\begin{aligned}
a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_k x_1^k &= y_1 \\
a_0 + a_1 x_2 + \ldots + a_k x_2^k &= y_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\
a_0 + a_1 x_n + \ldots + a_k x_n^k &= y_n
\end{aligned}
$$

egyenletrendszer megoldása az a_0, a_1,..., a_k ismeretlenekre.

$$
\begin{bmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^k \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^k \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.
$$

Optimális megoldása a normálegyenletből megkapható.

P Másodfokú regresszió: Az x, y változók között egy $y = a + bx + cx^2$ összefüggés együtthatóit keressük, illetve azok legkisebb négyzetek elve szerinti legjobb becslését. $n = 4$ mérést végzünk, a mért adatok

k	x_k	y_k
1	-1	3
2	0	0
3	1	1
4	2	1

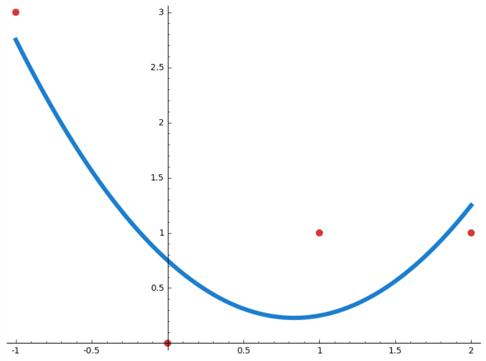
M A megadott adatok közti összefüggés mátrixszorzat alakja: $a + bx + cx^2 = y \rightsquigarrow$ az együtthatómátrix k-adik sorvektora $(1, x_k, x_k^2)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- A normálegyenlet

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

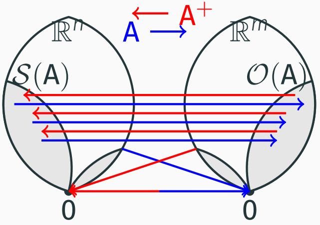
A megoldás $(a, b, c) = \frac{1}{4}(3, -5, 3)$, így a megadott (x_k, y_k) pontokra legjobban illeszkedő másodfokú polinom: $y = \frac{3}{4} - \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}x^2$.

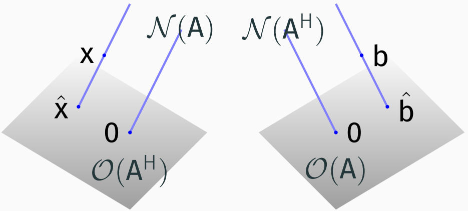


Pszeudoinverz

A pszeudoinverz fogalma

Á A sortér és az oszloptér közt létezik természetes kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés ($\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyetlen sortérbe eső mo-a).





D Az $\mathbf{A}$ mátrix (Moore–Penrose-féle) pszeudoinverze az az $\mathbf{A}^+$ mátrix, melyre tetszőleges $\mathbf{b}$ esetén az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer minimális abszolút értékű optimális megoldása $\mathbf{A}^+\mathbf{b}$.

T

A pszeudoinverz létezése

Jelölje az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *egyenletrendszer egyetlen sortérbe eső optimális megoldását* $\hat{\mathbf{x}}$*. Az* $A^+ : \mathbf{b} \mapsto \hat{\mathbf{x}}$ *függvény lineáris leképezés, így van mátrixa, melyet* $\mathbf{A}^+$ *jelöl.*

T

Pszeudoinverz hatása a kitüntetett altereken

Legyen $\mathbf{A}$ *valós vagy komplex mátrix.*

1. *Az* $\mathbf{X}$ *mátrix pontosan akkor pszeudoinverze* $\mathbf{A}$*-nak,*
   (a) *ha* $\mathbf{x} \perp \mathcal{N}(\mathbf{A})$ *esetén* $\mathbf{X}(\mathbf{Ax}) = \mathbf{x}$*, és*
   (b) *ha* $\mathbf{z} \perp \mathcal{O}(\mathbf{A})$ *esetén* $\mathbf{Xz} = \mathbf{0}$.
2. *Ha* $\mathbf{A}^+$ *az* $\mathbf{A}$ *pszeudoinverze, akkor*

$$\mathbf{AA}^+ = \mathbf{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})} \quad \text{és} \quad \mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A}^H)}.$$

Tehát $\mathbf{AA}^+$*, illetve* $\mathbf{A}^+\mathbf{A}$ *merőlegesen vetít az* $\mathbf{A}$*, illetve az* $\mathbf{A}^H$ *oszlopterére.*

Néhány pszeudoinverz

- $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{-1}$, ha $\mathbf{A}$ invertálható,
- $\mathbf{O}_{m\times n}^+ = \mathbf{O}_{n\times m}$,
- $[a]^+ = [1/a]$, ha $a \neq 0$, és $[0]^+ = [0]$,
- $(\mathbf{A}^+)^+ = \mathbf{A}$,
- ha $a_{ii} \neq 0$ $(i = 1, 2, \dots, r)$, akkor

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \mathbf{O} \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \\ \hline & & \mathbf{O} & & \mathbf{O} \end{array}\right]^+_{m\times n} = \left[\begin{array}{cccc|c} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \mathbf{O} \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{a_{rr}} & \\ \hline & & \mathbf{O} & & \mathbf{O} \end{array}\right]_{n\times m}$$

A pszeudoinverz létezése és kiszámítása

T Ha a valós $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú, akkor $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}$, ha teljes sorrangú, akkor $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T})^{-1}$. Ha $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$, ahol $\mathbf{B}$ teljes oszlop-, $\mathbf{C}$ teljes sorrangú (ld. bázisfelbontás), akkor

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{C}^+\mathbf{B}^+ = \mathbf{C}^\mathsf{T}(\mathbf{C}\mathbf{C}^\mathsf{T})^{-1}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T} = \mathbf{C}^\mathsf{T}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{C}^\mathsf{T})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T}.$$

B Ha $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú, akkor $\mathcal{S}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^n$, és $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ invertálható:

$$(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

Meg kell még mutatnunk, hogy ha $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$, vagyis ha $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{z} = \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{A}^+\mathbf{z} = \mathbf{0}$: $(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{z} = (\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Ha $\mathbf{A}$ teljes sorrangú, akkor $\mathcal{O}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^m$: $\forall\mathbf{y}$-ra $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ konzisztens. Jelölje $\hat{\mathbf{x}}$ az egyetlen sortérbe eső megoldást, így minden más $\mathbf{x}$ megoldásra $\operatorname{\mathbf{proj}}_{\mathcal{S}(\mathbf{A})}\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$. $\mathbf{A}^+$-ra fenn kell álljon $\mathbf{A}^+\mathbf{y} = \hat{\mathbf{x}}$:

$$\operatorname{\mathbf{proj}}_{\mathcal{S}(\mathbf{A})}\mathbf{x} = \mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \left(\mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T})^{-1}\right)(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{A}^+\mathbf{y}.$$

Példák

P Számítsuk ki a következő mátrixok pszeudoinverzét!

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \ \text{és} \ \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

M **B** teljes oszloprangú, így

$$\mathbf{B}^+ = (\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}.$$

\- A **C** mátrix teljes sorrangú, így

$$\mathbf{C}^+ = \mathbf{C}^\mathsf{T}(\mathbf{C}\mathbf{C}^\mathsf{T})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

- M bázisfelbontása BC:

$$\mathsf{M}^+ = \mathsf{C}^+\mathsf{B}^+ = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- vagy

$$\begin{aligned} \mathsf{M}^+ &= \mathsf{C}^\mathsf{T}(\mathsf{B}^\mathsf{T}\mathsf{M}\mathsf{C}^\mathsf{T})^{-1}\mathsf{B}^\mathsf{T} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

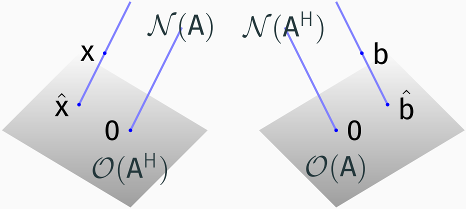
T Moore–Penrose-tétel: A valós A mátrixnak X pontosan akkor pszeudoinverze, ha az alábbi négy feltétel mindegyike fennáll:

$$a)\ \mathsf{AXA} = \mathsf{A}, \quad b)\ \mathsf{XAX} = \mathsf{X}, \quad c)\ (\mathsf{AX})^\mathsf{T} = \mathsf{AX}, \quad d)\ (\mathsf{XA})^\mathsf{T} = \mathsf{XA}.$$

K Tetszőleges $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix esetén

$$\mathsf{A}^+\mathsf{A} = \mathbf{proj}_{\mathcal{S}(\mathsf{A})} \quad \text{és} \quad \mathsf{AA}^+ = \mathbf{proj}_{\mathcal{O}(\mathsf{A})}\,.$$

Tehát $\mathsf{A}^+\mathsf{A}$ az $\mathbb{R}^n$ teret merőlegesen vetíti A sorterére, míg AA^+ az $\mathbb{R}^m$ teret merőleges vetíti A oszlopterére.



A pszeudoinverz és a min. absz. értékű opt. megoldás

P Keressük a minimális abszolút értékű optimális megoldást!

$$\begin{aligned} y + z &= 3 \\ x + y + 2z &= 2 \\ x + z &= 2 \end{aligned}$$

M Inkonzisztens, ui.: $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

Pszeudoinverzzel $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{b} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

Ortogonalizáció

Ortogonalizáció

Ortonormált és ortogonális bázis

OR és ONR lineáris függetlensége

D A páronként merőleges vektorokból álló vektorrendszert ortogonális rendszernek (OR), az egységvektorokból álló OR-t ortonormált rendszernek (ONR) nevezzük.

Á Egy valós euklideszi térben ha a $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ vektorrendszer vektorai zérusvektortól különbözőek és OR-t alkotnak, akkor

1. függetlenek,
2. $\{\mathbf{v}_i / \|\mathbf{v}_i\|\}$ ONR.

B TFH valamely c_1, c_2,..., c_k konstansokra $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$. Mivel $i \neq j$ esetén $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$, ezért a $\mathbf{v}_i$ vektorral beszorozva $c_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = 0$, amiből $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle \neq 0$ miatt következik, hogy $c_i = 0$.

2. $\dfrac{\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle}{\|\mathbf{v}_i\| \|\mathbf{v}_j\|} = \left\langle \dfrac{\mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|}, \dfrac{\mathbf{v}_j}{\|\mathbf{v}_j\|} \right\rangle$

K Egy zérusvektort nem tartalmazó OR, vagy ONR mindig bázisa az általa kifeszített altérnek. (Továbbiakban ONB)

Legjobb közelítés ONB esetén

T L! $\mathcal{V}$ valós euklideszi tér, $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k\} \subset \mathcal{V}$ ONR és a $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektor. Ekkor a

$$\hat{\mathbf{v}} = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{v} \rangle \mathbf{e}_1 + \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{v} \rangle \mathbf{e}_2 + \cdots + \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{v} \rangle \mathbf{e}_k \tag{1}$$

vektor az $\mathcal{A} = \operatorname{span}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$ altér $\mathbf{v}$-hez legközelebb fekvő pontja, azaz $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{proj}_{\mathcal{A}} \mathbf{v}$.

B $\langle \mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}, \mathbf{e}_j \rangle = \left\langle \mathbf{v} - \sum_{i=1}^{k} \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{v} \rangle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \right\rangle = 0$ $(j = 1, 2, \dots, k)$, tehát $\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}} \perp \mathcal{A}$, azaz $\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}} \in \mathcal{A}^{\perp}$.
Így a merőleges vetület definíciója szerint $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{proj}_{\mathcal{A}} \mathbf{v}$.

K ha $\mathcal{V}$ k-dimenziós ($\mathcal{E}$ a $\mathcal{V}$ bázisa), akkor
$\mathbf{v} = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{v} \rangle \mathbf{e}_1 + \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{v} \rangle \mathbf{e}_2 + \cdots + \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{v} \rangle \mathbf{e}_k$

K Ha $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\} \subset \mathcal{V}$ nullvektort nem tartalmazó OR, akkor

$$\hat{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{a}_i\|^2} \mathbf{a}_i, \text{ és ha } \mathcal{A} \text{ ortogonális bázis, akkor } \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{a}_i\|^2} \mathbf{a}_i.$$

Legjobb közelítés ONB esetén 2

m Az $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{v} \rangle$ skalárt a $\mathbf{v}$ vektor $\mathbf{e}_i$-hez tartozó Fourier-együtthatójának is nevezik.

P Határozzuk meg a $(3, 1, 2)$ pontnak az $(2, 3, 6)$ és $(3, -6, 2)$ vektorok által kifeszített síkra való merőleges vetületét!

M E két vektor a síkban OR-t alkot! Normálás után $\mathbf{a} = \frac{1}{7}(2, 3, 6)$ és $\mathbf{b} = \frac{1}{7}(3, -6, 2)$ ONR.

Behelyettesítés:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}} &= \langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle \, \mathbf{a} + \langle \mathbf{b}, \mathbf{v} \rangle \, \mathbf{b} \\ &= \left\langle \left(\tfrac{2}{7}, \tfrac{3}{7}, \tfrac{6}{7}\right), (3, 1, 2) \right\rangle \left(\tfrac{2}{7}, \tfrac{3}{7}, \tfrac{6}{7}\right) + \left\langle \left(\tfrac{3}{7}, \tfrac{-6}{7}, \tfrac{2}{7}\right), (3, 1, 2) \right\rangle \left(\tfrac{3}{7}, \tfrac{-6}{7}, \tfrac{2}{7}\right) \\ &= 3\left(\tfrac{2}{7}, \tfrac{3}{7}, \tfrac{6}{7}\right) + 1\left(\tfrac{3}{7}, \tfrac{-6}{7}, \tfrac{2}{7}\right) \\ &= \left(\tfrac{9}{7}, \tfrac{3}{7}, \tfrac{20}{7}\right). \end{aligned}$$

Ortogonalizáció

Gram–Schmidt-ortogonalizáció

T Ha $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ egy független vektorrendszer egy $\mathcal{V}$ euklideszi térben, akkor létezik olyan ortogonális $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k\}$ vektorrendszer, hogy minden $i = 1, 2, \ldots, k$ esetén

$$\operatorname{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_i) = \operatorname{span}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_i). \tag{2}$$

Ebből normálással ortonormált rendszert kapunk:

$$\left\{ \frac{\mathbf{b}_1}{\|\mathbf{b}_1\|}, \frac{\mathbf{b}_2}{\|\mathbf{b}_2\|}, \ldots, \frac{\mathbf{b}_k}{\|\mathbf{b}_k\|} \right\}$$

m Igazolható, hogy a Gram–Schmidt-ortogonalizáció működik összefüggő vektorokból álló vektorrendszerre is, annyi változással, hogy pontosan akkor lesz $\mathbf{b}_i = \mathbf{0}$, ha $\mathbf{a}_i$ nem független a kisebb indexű vektoroktól, azaz $\mathbf{a}_i$ benne van a $\operatorname{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{i-1})$ altérben.

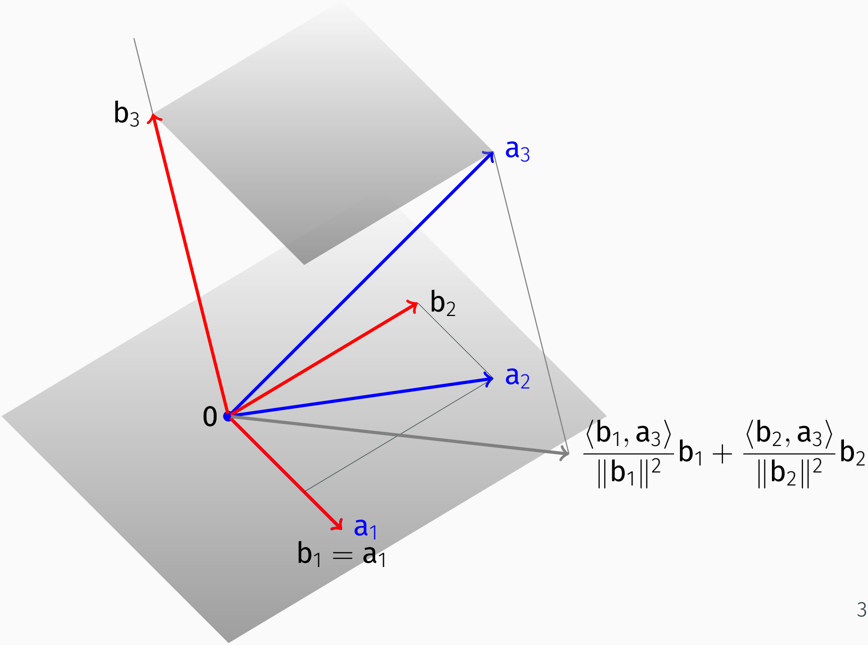
B A $\mathrm{span}(\mathbf{a}_1) = \mathrm{span}(\mathbf{b}_1)$ összefüggés teljesül, ha $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1$.

$\mathrm{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \mathrm{span}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ és $\mathbf{b}_1 \perp \mathbf{b}_2$ teljesül, ha $\mathbf{b}_2$ az $\mathbf{a}_2$-nek a $\mathbf{b}_1$ által kifeszített altérre merőleges összetevője:

$$\mathbf{b}_2 := \mathbf{a}_2 - \left\langle \frac{\mathbf{b}_1}{\|\mathbf{b}_1\|}, \mathbf{a}_2 \right\rangle \frac{\mathbf{b}_1}{\|\mathbf{b}_1\|} = \mathbf{a}_2 - \frac{\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2 \rangle}{\|\mathbf{b}_1\|^2} \mathbf{b}_1$$

$\mathbf{b}_2 \neq \mathbf{0}$, hisz $\mathbf{b}_2 = \mathbf{0}$ esetén $\mathbf{a}_2 = \frac{\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2 \rangle}{\|\mathbf{b}_1\|^2} \mathbf{b}_1 = \frac{\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2 \rangle}{\|\mathbf{b}_1\|^2} \mathbf{a}_1$ lenne, azaz $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ nem lenne független, ez ellentmondás.

$\mathrm{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \mathrm{span}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ ✓


b_3
a_3
b_2
a_2
0
$\frac{\langle b_1, a_3\rangle}{\|b_1\|^2} b_1 + \frac{\langle b_2, a_3\rangle}{\|b_2\|^2} b_2$
a_1
$b_1 = a_1$

$\mathsf{b}_i \Rightarrow \mathsf{b}_{i+1}$: az a_{i+1} vektornak a

$$\operatorname{span}\left(\frac{\mathsf{b}_1}{\|\mathsf{b}_1\|}, \frac{\mathsf{b}_2}{\|\mathsf{b}_2\|}, \dots, \frac{\mathsf{b}_i}{\|\mathsf{b}_i\|}\right)$$

altérre merőleges összetevője legyen b_{i+1}

$$\boxed{\mathsf{b}_{i+1} := \mathsf{a}_{i+1} - \sum_{j=1}^{i} \frac{\langle \mathsf{b}_j, \mathsf{a}_{i+1}\rangle}{\|\mathsf{b}_j\|^2}\mathsf{b}_j}$$

$\mathsf{b}_{i+1} \neq \mathbf{0}$, különben a_{i+1} nem volna független az $\{\mathsf{a}_1, \dots, \mathsf{a}_i\}$ vektorrendszertől, azaz $\mathcal{A}$ nem volna független.

$\mathsf{b}_{i+1} \in \operatorname{span}(\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2, \dots, \mathsf{a}_{i+1})$, $\mathsf{a}_{i+1} \in \operatorname{span}(\mathsf{b}_1, \mathsf{b}_2, \dots, \mathsf{b}_{i+1}) \rightsquigarrow$ (2) ✓

Gram–Schmidt-ortogonalizáció: 1. példa

P Ortogonalizáljuk a $\{(3,6,2),(1,9,-4),(1,2,3)\}$ vektorrendszert! Adjuk meg a tér ortonormált bázisát is!

M $\mathbf{b}_1 = (3,6,2)$

$$\mathbf{b}_2 = (1,9,-4) - \frac{(3,6,2)\cdot(1,9,-4)}{(3,6,2)\cdot(3,6,2)}(3,6,2) = (-2,3,-6)$$

$$\mathbf{b}_3 = (1,2,3) - \frac{(3,6,2)\cdot(1,2,3)}{(3,6,2)\cdot(3,6,2)}(3,6,2) - \frac{(-2,3,-6)\cdot(1,2,3)}{(-2,3,-6)\cdot(-2,3,-6)}(-2,3,-6) = \frac{1}{7}(-6,2,3)$$

- Az ONR:

$$\left\{\frac{1}{7}(3,6,2), \frac{1}{7}(-2,3,-6), \frac{1}{7}(-6,2,3)\right\}$$

Gram–Schmidt-ortogonalizáció: 2. példa

P Keressünk ortonormált bázist az $(1, 1, 1, 1)$, $(3, -1, 3, -1)$, $(6, 2, 2, -2)$ vektorok által kifeszített altérben.

M OR:

$$\mathbf{b}_1 = (1, 1, 1, 1)$$

$$\mathbf{b}_2 = (3, -1, 3, -1) - \frac{(1, 1, 1, 1) \cdot (3, -1, 3, -1)}{(1, 1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1, 1)}(1, 1, 1, 1) = (2, -2, 2, -2)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_3 = (6, 2, 2, -2) &- \frac{(1, 1, 1, 1) \cdot (6, 2, 2, -2)}{(1, 1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1, 1)}(1, 1, 1, 1) \\ &- \frac{(2, -2, 2, -2) \cdot (6, 2, 2, -2)}{(2, -2, 2, -2) \cdot (2, -2, 2, -2)}(2, -2, 2, -2) = (2, 2, -2, -2)\end{aligned}$$

Az ONR (ONB):

$$\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\}$$

Gram–Schmidt-ortogonalizáció: 3. példa

P Keressünk ortonormált bázist az $(1,1,1,1)$, $(3,-1,3,-1)$, $(4,0,4,0)$, $(6,2,2,-2)$ vektorok által kifeszített altérben.

M OR:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{b}_1 &= (1,1,1,1)\\
\mathbf{b}_2 &= (3,-1,3,-1) - \frac{(1,1,1,1)\cdot(3,-1,3,-1)}{(1,1,1,1)\cdot(1,1,1,1)}(1,1,1,1) = (2,-2,2,-2)\\
\mathbf{b}_3 &= (4,0,4,0) - \frac{(1,1,1,1)\cdot(4,0,4,0)}{(1,1,1,1)\cdot(1,1,1,1)}(1,1,1,1)\\
&\qquad - \frac{(2,-2,2,-2)\cdot(4,0,4,0)}{(2,-2,2,-2)\cdot(2,-2,2,-2)}(2,-2,2,-2) = (0,0,0,0)\\
\mathbf{b}_3 &= (6,2,2,-2) - \frac{(1,1,1,1)\cdot(6,2,2,-2)}{(1,1,1,1)\cdot(1,1,1,1)}(1,1,1,1)\\
&\qquad - \frac{(2,-2,2,-2)\cdot(6,2,2,-2)}{(2,-2,2,-2)\cdot(2,-2,2,-2)}(2,-2,2,-2) = (2,2,-2,-2)
\end{aligned}
$$

ONR, mint az előző példában.

Ortogonális polinomok

- Nevezetesek az ortogonális polinomok, melyek a polinomok terében adnak ortogonális rendszert a

$$\langle p, q \rangle = \int_a^b p(x)q(x)w(x)\,\mathrm{d}x,$$

skalárszorzattal, ahol $w(x)$ egy adott súlyfüggvény. Pl.:

	intervallum	$w(x)$	az első néhány polinom
Legendre-polinomok	$[-1, 1]$	1	1, x, $\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$, $\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$,...
Csebisev-polinomok	$[-1, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	1, x, $2x^2 - 1$, $4x^3 - 3x$,...
Hermite-polinomok	$(-\infty, \infty)$	e^{-x^2}	1, x, $4x^2 - 2$, $8x^3 - 12x$,...

QR-felbontás

QR-felbontás

Szemiortogonális mátrixok

Ortogonális és szemiortogonális mátrixok

D Egy valós négyzetes mátrix ortogonális, ha oszlopvektorai vagy sorvektorai ONR-t alkotnak. Ha nem kötjük ki, hogy a mátrix négyzetes legyen, szemiortogonális mátrixról beszélünk.

P Melyek ortogonálisak és melyek szemiortogonálisak?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & -3 \\ 3 & -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

M Mindhárom mátrix szemiortogonális, **C** ortogonális.

m Szerencsétlen szóhasználat (ortogonális – ortonormált).

m Minden ortogonális mátrix szemiortogonális is.

m Egy nem négyzetes mátrixnál vagy csak a sorai, vagy csak az oszlopai alkothatnak ONR-t, négyzetesnél mindkettő (bizonyítjuk).

m Az egységmátrix és minden permutáló mátrix ortogonális.

Szemiortogonális mátrixok

T Legyen $m \geq n$ és $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Az alábbi állítások ekvivalensek:

1. $\mathbf{Q}$ szemiortogonális,
2. $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q} = \mathbf{I}_n$.

m Ha $m \leq n$, $\mathbf{Q}$ pontosan akkor szemiortogonális, ha $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \mathbf{I}_m$.

m $m \geq n$ esetén $\mathbf{Q}^\mathsf{T}$ a $\mathbf{Q}$ bal inverze, $m \leq n$ esetén a jobb inverze. (később látni fogjuk, hogy $m = n$ esetén az inverze)

QR-felbontás

QR-felbontás és a GS-ortogonalizáció

QR-felbontás definíciója

m elemi sorműveletekkel háromszögalakra hozás $\to$ LU-felbontás ortogonalizációs eljárás eredménye $\to$ QR-felbontás

D Legyen $\mathbf{A}$ egy teljes oszloprangú mátrix. Az $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ felbontást QR-felbontásnak vagy redukált QR-felbontásnak nevezzük, ha $\mathbf{Q}$ az $\mathbf{A}$-val azonos méretű szemiortogonális mátrix, és $\mathbf{R}$ négyzetes felső háromszögmátrix, főátlójában pozitív elemekkel.

m A $\mathbf{Q}$ mátrixot új oszlopvektorok hozzávételével kiegészítjük egy ortogonális mátrixszá, az $\mathbf{R}$ mátrixot zérussorok hozzávételével egy $m \times n$-es felső háromszögmátrixszá, akkor ezek szorzata is $\mathbf{A}$:

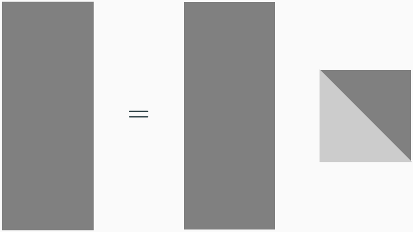
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \hat{\mathbf{Q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} = \mathbf{QR} + \hat{\mathbf{Q}}\mathbf{O} = \mathbf{QR}.$$

Ez a teljes QR-felbontás (másutt ezt a QR-felbontás). Itt $\mathbf{A}$-t egy ortog. és egy $\mathbf{A}$-val azonos méretű felső háromszögm. szorzata.

Teljes és redukált QR-felbontás

Teljes QR-felbontás (**Q** ortogonális, **R** az **A**-val azonos méretű)

Redukált QR-felb. (**Q** az **A**-val azonos méretű szemiortogonális)



A QR-felbontás létezése és egyértelműsége

T Bármely valós, teljes oszloprangú $\mathbf{A}$ mátrixnak létezik QR-felbontása, azaz létezik egy szemiortogonális $\mathbf{Q}$ mátrix és egy $\mathbf{R}$ felső háromszögmátrix pozitív főátlóbeli elemekkel, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$. Az így kapott felbontás egyértelmű.

B L! $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \dots\ \mathbf{a}_k] \in \mathbb{R}^{n\times k}$ ($\mathbf{A}$ teljes oszloprangú $\rightsquigarrow k \le n$). Létezés: Az ortogonalizáció egységvektorait jelölje $\mathbf{q}_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$), tehát $\operatorname{span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i) = \operatorname{span}(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_i)$. Így léteznek olyan r_{ij} skalárok, hogy

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_1 &= r_{11}\mathbf{q}_1\\
\mathbf{a}_2 &= r_{12}\mathbf{q}_1 + r_{22}\mathbf{q}_2\\
&\ \vdots\\
\mathbf{a}_k &= r_{1k}\mathbf{q}_1 + r_{2k}\mathbf{q}_2 + \dots + r_{kk}\mathbf{q}_k.
\end{aligned} \tag{3}$$

Ezt mátrixszorzat-alakba írva

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \dots & \mathbf{q}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1k} \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_{kk} \end{bmatrix} = \mathbf{QR}.$$

A Gram–Schmidt-eljárásból az is látható, hogy $r_{ii} = \|\mathbf{b}_i\| \rightsquigarrow r_{ii} > 0$.

R kiszámolása: $\mathbf{A} = \mathbf{QR} \rightsquigarrow \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{QR} = \mathbf{I}_k\mathbf{R} = \mathbf{R} \rightsquigarrow \mathbf{R} = \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A}$.

Egyértelműség*: Tfh $\mathbf{A} = \mathbf{QR} = \hat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{R}}$, ahol $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q} = \hat{\mathbf{Q}}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{I}$.

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} &= (\mathbf{QR})^\mathsf{T}\mathbf{QR} = \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{QR} = \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{R}, \\ \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} &= (\hat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{R}})^\mathsf{T}\hat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{R}}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{Q}}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{R}}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{R}}. \end{aligned}\right. \rightsquigarrow \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{R} = \hat{\mathbf{R}}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{R}} \rightsquigarrow (\hat{\mathbf{R}}^{-1})^\mathsf{T}\mathbf{R}^\mathsf{T} = \hat{\mathbf{R}}\mathbf{R}^{-1}.$$

A bal oldal alsó, a jobb oldal felső háromszögmátrix $\rightsquigarrow$ mindkét szorzat diagonális. Jelölje $\mathbf{R}$ (ill. $\hat{\mathbf{R}}$) főátlója elemeit r_i (ill. $\hat{r}_i$).
$\frac{r_i}{\hat{r}_i} = \frac{\hat{r}_i}{r_i} \rightsquigarrow r_i = \hat{r}_i$ ($r_i > 0$ és $\hat{r}_i > 0$ miatt) $\rightsquigarrow (\hat{\mathbf{R}}^{-1})^\mathsf{T}\mathbf{R}^\mathsf{T} = \hat{\mathbf{R}}\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{I} \rightsquigarrow$
$\mathbf{R} = \hat{\mathbf{R}} \rightsquigarrow \mathbf{A} = \mathbf{QR} = \hat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{R}}$ miatt $\mathbf{Q} = \hat{\mathbf{Q}}$.

QR-felbontás GS-ortogonalizációból

P Határozzuk meg az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontását.

M A GS második példában a $(1,1,1,1)$, $(3,-1,3,-1)$, $(6,2,2,-2)$ bázisból az ONB: $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\mathbf{A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Valóban,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

- m Szokás a QR-felbontást úgy is definiálni, hogy $\mathbf{A}$ tetszőleges (nem kell, hogy teljes oszloprangú legyen) és $\mathbf{R}$ főátlóbeli elemei lehetnek negatívak (sőt, ha $\mathbf{A}$ nem teljes oszloprangú, akkor 0-k is).
- m A Matlab/Octave programok a fenti általánosabb feltételek szerint működnek.
- Á* Ha $\mathbf{A} = \mathbf{Q}'\mathbf{R}'$, ahol $\mathbf{Q}'$ szemiortogonális, de $\mathbf{R}'$ főátlójában az i-edik elemek negatívak, ahol $i \in \mathcal{I}$ és $\mathcal{I}$ egy indexhalmaz, akkor $\mathbf{R}'$ i-edik sorát és $\mathbf{Q}'$ i-edik oszlopát -1-gyel szorozva minden $i \in \mathcal{I}$-re az $\mathbf{A}$ QR-felbontását kapjuk.
- B* $\mathbf{A} = \mathbf{Q}'\mathbf{R}' = \mathbf{Q}'\mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{R}'$, ahol $\mathbf{E}$ az $\mathbf{I}$-ből az i-edik elem -1-re változtatásával kapható ($i \in \mathcal{I}$).

QR-felbontás

Egyenletrendszer megoldása

Egyenletrendszer optimális megoldása QR-felbontással

T Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ teljes oszloprangú, $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ egy QR-felbontása, és $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer egyetlen sortérbe eső optimális megoldása $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{b}$, ami megkapható az

$$\mathbf{R}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{b}$$

egyenletrendszerből egyszerű visszahelyettesítéssel is.

B A normálegyenletből indulva

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b} && \mathbf{A} = \mathbf{QR} \text{ behelyettesítése után}\\
(\mathbf{QR})^\mathsf{T}\mathbf{QR}\hat{\mathbf{x}} &= (\mathbf{QR})^\mathsf{T}\mathbf{b} &&\\
\mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{QR}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{b} && \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q} = \mathbf{I}\\
\mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{R}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{b} && \text{balról szorzás az } (\mathbf{R}^\mathsf{T})^{-1} \text{ mátrixszal}\\
\mathbf{R}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{b}. &&
\end{aligned}$$

K Ha $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ teljes oszloprangú, akkor $\mathbf{A}^+ = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^\mathsf{T}$.

Egyenletrendszer optimális megoldása QR-felbontással

P Oldjuk meg az alábbi inkonzisztens egyrsz-t QR-felbontással:

$$\begin{aligned} x + 3y + 6z &= 8 \\ x - y + 2z &= 2 \\ x + 3y + 2z &= 2 \\ x - y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

QR-felbontás: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$

$\mathbf{R}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{b}$: $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$

Megoldás visszahelyettesítéssel: $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = (1, 0, 1)$.

Ortogonális mátrixok

Ortogonális mátrixok

T Legyen $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Az alábbi állítások ekvivalensek:

1. $\mathbf{Q}$ oszlopvektorai ortonormált rendszert alkotnak.
2. $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q} = \mathbf{I}_n$.
3. $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^\mathsf{T}$.
4. $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \mathbf{I}_n$.
5. $\mathbf{Q}$ sorvektorai ortonormált rendszert alkotnak.

B $1 \Rightarrow 2$: az előző állításban láttuk.

$2 \Rightarrow 3$: $\mathbf{Q}$ négyzetes $\rightsquigarrow$ $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ miatt $\mathbf{Q}$ invertálható $\rightsquigarrow$ $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^\mathsf{T}$.

$3 \Rightarrow 4$: $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^\mathsf{T} \rightsquigarrow \mathbf{Q}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \mathbf{I}_n$.

$4 \Rightarrow 5$: $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \mathbf{I}_n$ (sorvektorszor-oszlopvektor) $\rightsquigarrow$ $\mathbf{Q}$ soravektorai ONB-t alkotnak.

$5 \Rightarrow 1$: Bizonyítottuk, hogy $1 \Rightarrow 5$. Alkalmazzuk ezt $\mathbf{Q}^\mathsf{T}$-ra.

Ortogonális mátrix inverze a transzponáltja

P Számítsuk ki az

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & -3 \\ 3 & -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

mátrixok inverzét!

M Mindhárom mátrix ortogonális, tehát az inverzek:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ortogonális mátrixhoz tartozó mátrixleképezés

T Legyen $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Az alábbi állítások ekvivalensek:

1. $\mathbf{Q}$ ortogonális.
2. $\|\mathbf{Qx}\| = \|\mathbf{x}\|$ minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektorra.
3. $\mathbf{Qx} \cdot \mathbf{Qy} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vektorra.

B $1 \Rightarrow 2$: Ha $\mathbf{Q}$ ortogonális, akkor minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vektorra

$$\|\mathbf{Qx}\|^2 = \mathbf{Qx} \cdot \mathbf{Qx} = (\mathbf{Qx})^\mathsf{T}(\mathbf{Qx}) = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Qx} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2.$$

$2 \Rightarrow 3$: Mivel $\|\mathbf{Q}(\mathbf{x}+\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|$ és $\|\mathbf{Q}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$, ezért minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vektorra

$$\begin{aligned}\mathbf{Qx} \cdot \mathbf{Qy} &= \frac{1}{4}\left(\|\mathbf{Qx}+\mathbf{Qy}\|^2 - \|\mathbf{Qx}-\mathbf{Qy}\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|\mathbf{Q}(\mathbf{x}+\mathbf{y})\|^2 - \|\mathbf{Q}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right.\\ &= \frac{1}{4}\left(\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2\right) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\end{aligned}$$

$3 \Rightarrow 1$: $\mathbf{q}_i = \mathbf{Qe}_i$ jelöléssel $\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j = \mathbf{Qe}_i \cdot \mathbf{Qe}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$.

Ortogonális mátrix további tulajdonságai

K Egy valós euklideszi térben az ortogonális mátrixhoz tartozó leképezés (ortogonális leképezés) hossztartó, távolságtartó, skalárszorzattartó, szögtartó (nem körüljárás-tartó).

m Az ortogonális mátrixok nem nagyítják fel a mérési és kerekítési hibákat, hisz távolságtartók!!!

T
1. Ha $\mathbf{Q}$ valós ortogonális mátrix, akkor $|\det(\mathbf{Q})| = 1$.
2. Az $n \times n$-es valós ortogonális mátrixok $O(n)$ halmazából nem vezet ki a mátrixszorzás és invertálás művelete (az 1 determinánsúak $SO(n)$ halmazából sem).

B
1. $\det(\mathbf{Q}^\mathsf{T})\det(\mathbf{Q}) = \det(\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q}) = \det(\mathbf{I}) = 1$, $\det(\mathbf{Q}^\mathsf{T}) = \det(\mathbf{Q}) \rightsquigarrow$ $\det(\mathbf{Q}) = 1$ vagy $\det(\mathbf{Q}) = -1$.
2. $\mathbf{Q}$ ortogonális $\rightsquigarrow \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^\mathsf{T}$, ami ortogonális
   $\mathbf{Q}_1$ és $\mathbf{Q}_2$ ortogonális $\rightsquigarrow (\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2)^\mathsf{T}\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_2^\mathsf{T}\mathbf{Q}_1^\mathsf{T}\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_2^\mathsf{T}\mathbf{Q}_2 = \mathbf{I}$,
   $\rightsquigarrow \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2$ ortogonális.

Ortogonális mátrixok

2D és 3D ortogonális transzformációi

A sík ortogonális transzformációi

T

2D ortogonális transzformációi

Minden $O(2)$-be eső ortogonális mátrix vagy egy forgatás, vagy egy egyenesre való tükrözés mátrixa. Mátrixuk alakja

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad \textit{vagy} \quad \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

T

3D ortogonális transzformációi

$SO(3)$ minden eleme forgatás mátrixa, $O(3) - SO(3)$ eleme egy origóra való tükrözés és egy forgatás szorzata.

P Az 1 determinánsú ortogonális

$$\frac{1}{15}\begin{bmatrix}14 & -5 & 2\\ 5 & 10 & -10\\ 2 & 10 & 11\end{bmatrix}$$

mátrix milyen tengely körüli és mekkora szöggel való forgatás mátrixa?

M A forgástengely irányvektorára $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}$, azaz $(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Innen a forgástengely:

$$\frac{1}{15}\begin{bmatrix}-1 & -5 & 2\\ 5 & -5 & -10\\ 2 & 10 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = t\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}.$$

Forgásszög: egy $\mathbf{v}$-re merőleges vektort képével (pl. $\mathbf{w} = (0, 1, 0)$):

$$\frac{1}{15}\begin{bmatrix}14 & -5 & 2\\ 5 & 10 & -10\\ 2 & 10 & 11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1/3\\ 2/3\\ 2/3\end{bmatrix} \rightsquigarrow \cos\alpha = \frac{\mathbf{w}\cdot\mathbf{A}\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|\|\mathbf{A}\mathbf{w}\|} = \frac{2}{3}.$$

Ortogonális mátrixok

Primitív ortogonális transzformációk

Givens-forgatás

m Az n-dimenziós tér forgatásai és tükrözései közül kiválaszthatunk olyan egyszerű, ún. primitív ortogonális transzformációkat, melyek mátrixai szorzataként az összes ortogonális mátrix előállítható.

D Givens-forgatás: két koordinátatengely által kifeszített síkban való forgatás a többi koordinátatengely helyben hagyása mellett. Mátrixa

$$\mathsf{G} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \cos\alpha & \dots & -\sin\alpha & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \sin\alpha & \dots & \cos\alpha & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Givens-forgatás

P Keressük meg azt a forgatást, mely az (a, b) vektort az $(r, 0)$-ba viszi, ahol $r^2 = a^2 + b^2$.

M $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}.$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\cos\alpha = {}^{a}\!/_{r} \qquad \begin{bmatrix} {}^{a}\!/_{r} & {}^{b}\!/_{r} \\ -{}^{b}\!/_{r} & {}^{a}\!/_{r} \end{bmatrix}$$

$$\sin\alpha = -{}^{b}\!/_{r}$$

m Egy ilyen részmátrixot tartalmazó **G** Givens-forgatással elérhető, hogy egy **X** mátrix egy eleme helyén 0 legyen a **GX**-ben. (ritka mátrixok, párhuzamosítható számítások)

m $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ kiszámítása a túl- vagy alulcsordulás elkerülésével

$a \geqslant b$ esetén: $r = |a|\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$

Householder-tükrözés

D Householder-tükrözés: hipersíkra való tükrözés. Mátrixa ($\mathbf{n}$ normálvekorral vagy $\mathbf{e}$ egységnyi normálvektorral)

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - 2\mathbf{e}\mathbf{e}^{\mathsf{T}} = \mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{n}^{\mathsf{T}}\mathbf{n}}\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}}$$

Á $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\|$, akkor az $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^{\perp}$ hipersíkra való Householder-tükrözés az $\mathbf{a}$ vektort $\mathbf{b}$-be viszi és viszont.

Householder-tükrözés

P Határozzuk meg azt a $\mathbf{H}$ mátrixot, mely az $(1,-1,-1,1)$ vektort a $(2,0,0,0)$-ba viszi.

M Az $(1,-1,-1,1)-(2,0,0,0)=(-1,-1,-1,1)$ vektorra merőleges hipersíkra való tükrözés mátrixa

$$\mathbf{H}=\mathbf{I}-\frac{2}{\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^\mathsf{T}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&-1&-1&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&1&-1\\1&1&1&-1\\1&1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1&-1&1\\-1&1&-1&1\\-1&-1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

Valóban, $\mathbf{H}\cdot(1,-1,-1,1)=(2,0,0,0)$.

A Givens-forgatás és a Householder-tükrözés alkalmazásai

- Givens-forgatás
    - mátrixelemek eliminálására pl. QR-felbontásnál
    - párhuzamosítható
    - ritka mátrixok esetén hatékonyabb a Householder-tükrözésnél
- Householder-tükrözés
    - QR-felbontás numerikus kiszámításához (a Gram–Schmidt-eljárás instabil)
    - nem ritka mátrixokra gyorsabb a Givens-forgatásnál a QR-felbontás kiszámításában
    - mátrix Hessenberg (a subdiagonális alatt minden elem 0) alakra hozásánál

Ortogonális mátrixok

QR primitív ortogonális transzformációval

QR-felbontás Givens-forgatásokkal

P Határozzuk meg az

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 8 \\ 3 & 10 & 6 \\ 0 & 12 & 13 \end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontását Givens-forgatások segítségével!

M az első és második sorokat és oszlopokat figyelve elimináljuk a második sor első elemét: $a = 4$, $b = 3$, tehát $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $\cos\alpha = {}^4\!/_5$, $\sin\alpha = -{}^3\!/_5$.

$$Q_1 = \begin{bmatrix} {}^4\!/_5 & {}^3\!/_5 & 0 \\ -{}^3\!/_5 & {}^4\!/_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad Q_1 A = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 12 & 13 \end{bmatrix}.$$

Következő lépésben a $\mathsf{Q}_1\mathsf{A}$ mátrix harmadik sorának második elemét elimináljuk ($a = 5$, $b = 12$, tehát $r = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$, $\cos\alpha = 5/13$, $\sin\alpha = -12/13$):

$$\mathsf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/13 & 12/13 \\ 0 & -12/13 & 5/13 \end{bmatrix}. \qquad \mathsf{R} = \mathsf{Q}_2\mathsf{Q}_1\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 0 & 13 & 12 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

és innen

$$\mathsf{Q} = (\mathsf{Q}_2\mathsf{Q}_1)^{-1} = \mathsf{Q}_1^T\mathsf{Q}_2^T = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/13 & 36/65 \\ 3/5 & 4/13 & -48/65 \\ 0 & 12/13 & 5/13 \end{bmatrix},$$

amely mátrixokkal $\mathsf{A} = \mathsf{QR}$ valóban fennáll.

QR-felbontás Householder-tükrözésekkel (ötlet)

$$A = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \to Q_1 A = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{bmatrix} \to Q_2 Q_1 A = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

$$Q_1 = H_1 \qquad Q_2 = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & H_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

$$\to Q_3 Q_2 Q_1 A = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

$$Q_3 = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{H_3}} \\ 0 & 0 & & \end{array}\right]$$

QR-felbontás Householder-tükrözésekkel

P Határozzuk meg az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & -7 \end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontását Householder-módszerrel!

QR-felbontás Householder-tükrözésekkel – megoldás

M Az $(1, 2, -2) \mapsto (3, 0, 0)$ transzformációhoz az

$$\mathbf{n} = (1, 2, -2) - (3, 0, 0) = (-2, 2, -2)$$

vektorral Householder-tükrözést végzünk:

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{I}_3 - \frac{2}{\mathbf{n}^\mathsf{T}\mathbf{n}}\mathbf{n}\mathbf{n}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

Ezután a $\mathbf{Q}_1\mathbf{A}$ mátrixból képzeletben elhagyva az első sort és oszlopot a $(4,3) \mapsto (5,0)$ transzformációhoz kell az $\mathbf{n} = (4,3) - (5,0) = (-1,3)$ vektorral Householder-tükrözést végezni:

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{I}_2 - \frac{2}{\mathbf{n}^\mathsf{T}\mathbf{n}}\mathbf{n}\mathbf{n}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_2 = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 4/5 & 3/5 \\ 0 & 3/5 & -4/5 \end{array}\right], \qquad \mathbf{R} = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1)^{-1} = \mathbf{Q}_1^\mathsf{T}\mathbf{Q}_2^\mathsf{T} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 5 & 2 & 14 \\ 10 & 10 & -5 \\ -10 & 11 & 2 \end{bmatrix}.$$

Speciális komplex mátrixok

Unitér mátrixok

m Az ortogonális mátrixok komplex analogonjai az unitér mátrixok.

D Unitér mátrix Egy komplex négyzetes $\mathbf{U}$ mátrix unitér, ha $\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{U} = \mathbf{I}$.

m Az ortogonális mátrixokhoz hasonlóan bizonyítható, hogy egy $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix pontosan akkor unitér, ha az alábbiak bármelyike teljesül:

1. $\mathbf{U}\mathbf{U}^{\mathsf{H}} = \mathbf{I}$,
2. $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{\mathsf{H}}$,
3. $\mathbf{U}$ oszlopvektorai ortonormált bázist alkotnak a komplex skalárszorzásra nézve,
4. $\mathbf{U}$ sorvektorai ortonormált bázist alkotnak a komplex skalárszorzásra nézve,
5. $\|\mathbf{U}\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ minden $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ vektorra,
6. $\mathbf{U}\mathbf{x} \cdot \mathbf{U}\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

Komplex mátrix kitüntetett alterei

- **m** Komplex mátrixok szorzatában NEM sorvektor és oszlopvektor skaláris szorzata szerepel!
- **m** $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbb{C}^n = \mathcal{S}(\bar{\mathsf{A}}) \oplus \mathcal{N}(\mathsf{A})$, de $\mathcal{S}(\bar{\mathsf{A}}) = \mathcal{O}(\mathsf{A}^{\mathsf{H}})$.
- **T** Komplex mátrix kitüntetett alterei Ha $\mathsf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, akkor
  1. $\mathcal{O}(\mathsf{A}^{\mathsf{H}}) \perp \mathcal{N}(\mathsf{A})$, $\mathcal{O}(\mathsf{A}) \perp \mathcal{N}(\mathsf{A}^{\mathsf{H}})$,
  2. $\mathbb{C}^n = \mathcal{O}(\mathsf{A}^{\mathsf{H}}) \oplus \mathcal{N}(\mathsf{A})$, $\mathbb{C}^m = \mathcal{O}(\mathsf{A}) \oplus \mathcal{N}(\mathsf{A}^{\mathsf{H}})$,

GS-ortogonalizáció komplex terekben

P Ortogonalizáljuk az $(\mathrm{i}, 0, 0)$, $(\mathrm{i}, \mathrm{i}, \mathrm{i})$, $(\mathrm{i}, \mathrm{i}, 0)$ vektorokból álló vektorrendszert.

M $\mathbf{b}_1 = (\mathrm{i}, 0, 0)$, a továbbiakban használjuk a következő képlet valamelyik alakját:

$$\mathbf{b}_{i+1} = \mathbf{a}_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} \frac{\mathbf{b}_k(\mathbf{b}_k^{\mathsf{H}}\mathbf{a}_{i+1})}{\mathbf{b}_k^{\mathsf{H}}\mathbf{b}_k} = \mathbf{a}_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} \frac{(\mathbf{b}_k^{\mathsf{H}}\mathbf{a}_{i+1})}{\mathbf{b}_k^{\mathsf{H}}\mathbf{b}_k}\mathbf{b}_k$$

- $$\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathrm{i} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -\mathrm{i} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{bmatrix}$$

Az ONB

$$\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathrm{i} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -\mathrm{i} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} - \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{i}/2 \\ -\mathrm{i}/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{bmatrix}, \mathbf{q}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} \end{bmatrix}$$

Önadjungált mátrixok

D Az $\mathbf{A}$ komplex mátrixot önadjungált vagy Hermite-féle mátrixnak nevezzük, ha

$$\mathbf{A}^{\mathsf{H}} = \mathbf{A}.$$

P Melyek önadjungáltak?

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 2 & 2-3i \\ 1-i & 2+3i & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} i & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2 \end{bmatrix}$$

m önadjungált mátrix főátlójában csak valósok állhatnak

m Minden valós szimmetrikus mátrix önadjungált,

Ferdén önadjungált mátrixok

D $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ferdén önadjungált, ha

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^{\mathsf{H}}$$

P $\begin{bmatrix} 2\mathrm{i} & 3-\mathrm{i} \\ -3-\mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}$ ferdén önadjungált.

Á ferdén önadjungált mátrixok főátlójában tiszta imaginárius számok állnak (a 0 is annak tekintendő).

Á ha $\mathbf{A}$ ferdén önadjungált, akkor $\mathrm{i}\mathbf{A}$ és $-\mathrm{i}\mathbf{A}$ önadjungált.

Á Minden komplex négyzetes mátrix egyértelműen előáll egy önadjungált és egy ferdén önadjungált mátrix összegeként.

B $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$, ahol $\mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathsf{H}})$, $\mathbf{C} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathsf{H}})$ és $\mathbf{B}$ önadjungált, $\mathbf{C}$ ferdén önadjungált.

Normális mátrixok

D Az adjungáltjával fölcserélhető mátrixokat normális mátrixoknak nevezzük:

$$AA^H = A^H A$$

Á Minden valós szimmetrikus, ferdén szimmetrikus és ortogonális mátrix normális. Minden komplex önadjungált, ferdén önadjungált és unitér mátrix normális.

m Van olyan mátrix, mely nem esik a fönt fölsorolt osztályokba, de normális:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad AA^H = A^H A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Néhány elemi állítás

F $\forall \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrixra $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{A}) = \mathcal{N}(\mathbf{A})$ és $\mathcal{O}(\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{A}) = \mathcal{O}(\mathbf{A}^\mathsf{H})$.

F Ha $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{n\times n}$ önadjungált és $\mathbf{U} \in \mathbf{C}^{n\times n}$ unitér mátrixok, akkor

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}$$

önadjungált! (Önadjungált mátrixhoz unitéren hasonló mátrix is önadjungált!)

F Legyen $\mathbf{S} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ szimmetrikus, $\mathbf{H} \in \mathbf{C}^{n\times n}$ önadjungált mátrix. Ekkor minden $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, ill. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ vektorra

$$(\mathbf{S}\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{S}\mathbf{v}), \text{ ill. } (\mathbf{H}\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{H}\mathbf{y})!$$

F Az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ négyzetes mátrixra ekvivalensek a következők:

1. $\mathcal{O}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A})$,
2. $\mathcal{O}(\mathbf{A}^\mathsf{H}) = \mathcal{O}(\mathbf{A})$,
3. $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{H}) = \mathcal{N}(\mathbf{A})$.

m Pl. az invertálható $\mathbf{A}$ mátrix ilyen, hisz $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$.