



BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM



Haladó lineáris algebra

BMETE90MX54 (FELSŐBB MATEMATIKA VILLAMOSMÉRNÖKÖKNEK)



Eulideszi tér

VALÓS ÉS KOMPLEX, TÁVOLSÁG, MERŐLEGESSÉG



Wetttl Ferenc

ALGEBRA TANSZÉK



Carlo Carrà
The Engineer's Lover
L'amante dell'ingegnere
1921
Metaphysical art
Peggy Guggenheim
Collection, Venice, Italy
55 x 45 cm

Ismeretek, képességek, célok

- skaláris szorzat értékének kiszámítása báziscsere után,
- skaláris szorzat absztrakt fogalma valós és komplex esetben,
- hosszúság, szög (csak valósban) kiszámítása, merőlegesség igazolása
- mátrix adjungáltja,
- vektorral párhuzamos és merőleges összetevő kiszámítása,
- becslés skalárszorzat értékére
(Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség).

Valós euklideszi tér

Skaláris szorzat másik bázisban

- P** Legyen $\mathcal{B} = \{(2, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -1, 1)\}$. Milyen képlettel számolható ki az $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ skaláris szorzat, ha a két vektor $\mathcal{B}$ -beli koordinátás alakját ismerjük?
- M** Jelölés: $\mathbf{x}$ vektor $\mathcal{B}$ -beli koordinátás alakja $\mathbf{x}_{\mathcal{B}}$, a standard alak $\mathbf{x}_{\mathcal{E}}$. Ekkor $\mathbf{x}_{\mathcal{E}} = \mathbf{A}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} \mathbf{x}_{\mathcal{B}}$. Így

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}_{\mathcal{E}}^{\top} \mathbf{y}_{\mathcal{E}} = (\mathbf{A}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} \mathbf{x}_{\mathcal{B}})^{\top} \mathbf{A}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} \mathbf{y}_{\mathcal{B}} = \mathbf{x}_{\mathcal{B}}^{\top} (\mathbf{A}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}^{\top} \mathbf{A}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}) \mathbf{y}_{\mathcal{B}} = \mathbf{x}_{\mathcal{B}}^{\top} \mathbf{B} \mathbf{y}_{\mathcal{B}}.$$

Esetünkben

$$\mathbf{A}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}^{\top} \mathbf{A}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- K** Mit tudunk a $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{\top} \mathbf{A}$ mátrixról?
Szimmetrikus, invertálható, de ez még kevés. (Meg fogjuk mutatni, hogy pozitív definit is.)

A skaláris szorzás alaptulajdonságai $\mathbb{R}^n$ -ben

- T Legyen $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ az $\mathbb{R}^n$ három tetszőleges vektora, és legyen c egy tetszőleges valós. Ekkor
- a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ a művelet fölcserélhető (kommutatív)
 - b) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ disztributív
 - c) $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ a két szorzás kompatibilis
 - d) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ és $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
- m A d) pont szerint egy másik bázisban felírva a skaláris szorzást, $\mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x} > 0$ kell $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektorra.
- D A $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrixot pozitív definitnek nev., ha $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} : \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x} > 0$.

Valós euklideszi tér

D Legyen $\mathcal{V}$ egy tetszőleges **valós** vektortér, és legyen

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$$

olyan függvény, melyre bármely $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ vektorok és $c \in \mathbb{R}$ skalár esetén

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \quad \text{szimmetria}$$

$$\langle c\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \quad \text{homogenitás}$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \quad \text{additivitás}$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0, \text{ ha } \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \quad \text{pozitivitás}$$

E $\langle \cdot, \cdot \rangle$ függvényt a $\mathcal{V}$ -n értelmezett **skaláris szorzásnak**, a skaláris szorzással ellátott $\mathcal{V}$ vektorteret **euklideszi térnek** nevezzük.

m Nem vihető át *komplex vagy véges testekre* módosítás nélkül!

D **Bilineáris** fv.: kétváltozós, mindkét változójában lineáris fv.

Példák valós euklideszi térekre

- P $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \mathbf{y}$ skaláris szorzás $\mathbb{R}^n$ -ben, ha $\mathbf{A}$ invertálható. (Be fogjuk látni, hogy $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{y}$ pontosan akkor skaláris szorzás, ha $\mathbf{B}$ pozitív definit.)
- P Az $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrixokra az $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \text{trace}(\mathbf{A} \mathbf{B}^T) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}$ skaláris szorzást definiál.
- P Az $x = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$ sorozatok, melyekre $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 < \infty$. vektorteret alkotnak, melyen skaláris szorzást definiál
 $\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$.
- P Az $[a, b]$ intervallumon folytonos függvények $C[a, b]$ vektorterén az $f, g \in C[a, b]$ függvényekre az $\langle f, g \rangle = \int_a^b fg$ skaláris szorzás. (E tér altere a polinomok tere, az is euklideszi tér e skalárszorzással.)

Távolság és szög valós euklideszi térben

D L! $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ két tetszőleges vektor.

1. Az $\mathbf{u}$ vektor **hosszán (abszolút értékén, normáján)** önmagával vett skaláris szorzatának gyökét értjük, azaz

$$|\mathbf{u}| = \|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}. \quad (1)$$

2. Az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok **(hajlás)szögének** koszinusza:

$$\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\angle} := \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \quad (2)$$

3. Amh az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok **merőlegesek** egymásra, ha

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0. \quad (3)$$

4. A két vektor (végpontjának) **távolsága**

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \quad (4)$$

Koordinátás alakok

P $\mathbf{u} = (2, 3, 4, 14)$, $\mathbf{v} = (4, 6, -10, 10)$, $\mathbf{w} = (0, 3, 6, -2)$, $\|\mathbf{u}\| = ?$,
 $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = ?$, $\cos(\mathbf{u}, \mathbf{w})_{\angle} = ?$

M Az (1), a (4) és a (2) képletekkel:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2 + 14^2} = \sqrt{225} = 15,$$

$$\begin{aligned} d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \sqrt{(2-4)^2 + (3-6)^2 + (4-(-10))^2 + (14-10)^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 3^2 + 14^2 + 4^2} = 15 \end{aligned}$$

$$\cos(\mathbf{u}, \mathbf{w})_{\angle} = \frac{2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + 14 \cdot (-2)}{15 \cdot \sqrt{0^2 + 3^2 + 6^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{21}.$$

Euklideszi terek izomorfizmusa

- T** $\mathcal{V}$ egy valós n -dimenziós euklideszi tér. Ekkor létezik olyan $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ izomorfizmus, mely skalárszozattartó is, azaz amelyre $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}: \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = f(\mathbf{u}) \cdot f(\mathbf{v})$ (itt $\cdot$ a standard skalárszorzás).
- B** $\mathcal{V}$ egy ortonormált bázisa $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$, akkor az $f: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^n; \mathbf{b}_i \mapsto f(\mathbf{b}_i) = \mathbf{e}_i$ kiterjeszthető lineáris leképezéssé. $\text{Im } f = \text{span}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \dim \text{Ker } f = n - n = 0 \rightsquigarrow f$ izom.
- A $\mathcal{V}$ -beli $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n u_i \mathbf{b}_i$, $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v_i \mathbf{b}_i$ vektorokra:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i,j} u_i v_j \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j \rangle = \sum_i u_i v_i = f(\mathbf{u}) \cdot f(\mathbf{v}).$$

(Meg fogjuk mutatni, hogy egy tetszőleges bázisból ortonormált bázis kapható.)

Néhány következmény

- m Tehát minden végesdimenziós valós euklideszi tér azonosítható a standard skalárszorzáttal ellátott $\mathbb{R}^n$ euklideszi térrel. Így az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térre bizonyított állítások igazak maradnak!
- T CBS-egyenlőtlenség! $\mathcal{V}$ végesdimenziós valós euklideszi tér. Ekkor tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektorokra

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|. \quad (5)$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ lineárisan összefüggők, azaz $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$.

- T Tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|,$$

egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{u} \uparrow\uparrow \mathbf{v}$.

Skaláris szorzat és abszolút érték (norma) kapcsolata

T Polarizációs formulák: Tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{4} \left(\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 \right) \quad (6)$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{2} \left(\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2 \right) \quad (7)$$

B Az abszolút érték (1)-beli definíciója alapján

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \left(\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 \right) &= \frac{1}{4} (\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle) \\ &= \frac{1}{4} (\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle) \\ &= \frac{1}{4} (4 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle. \end{aligned}$$

A másik formula hasonlóan bizonyítható.

Komplex euklideszi tér

Mi lehet a skaláris szorzás $\mathbb{C}^n$ -ben?

m A $\sum_i z_i w_i$ nem működik:

$$(1, i) \cdot (1, i) \stackrel{?}{=} 1 - 1 = 0$$

$$(i, i) \cdot (i, i) \stackrel{?}{=} -1 - 1 = -2$$

m Ötletadó kérdés: az 1-dimenziós térben mi az abszolút érték?

A $z = a + ib$ szám abszolút értékének négyzete $z\bar{z}$, és nem z^2 !

Eszerint $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ és a $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ vektorok skaláris szorzatának egy lehetséges definíciója

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2 + \dots + z_n \bar{w}_n, \text{ vagy}$$

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = \bar{z}_1 w_1 + \bar{z}_2 w_2 + \dots + \bar{z}_n w_n.$$

Komplex mátrix adjungáltja

- D** Az $\mathbf{A}$ komplex mátrix **adjungáltján** (vagy **Hermite-féle transzponáltján**) elemenkénti konjugáltjának transzponáltját értjük. Az $\mathbf{A}$ adjungáltját $\mathbf{A}^*$, vagy Hermite neve után $\mathbf{A}^H$ jelöli, tehát $\mathbf{A}^H = \overline{\mathbf{A}}^T$.
- m** semmi köze a „klasszikus adjungálthoz”!
- P** $\begin{bmatrix} i & 1+i \\ -i & 2 \end{bmatrix}^H = \begin{bmatrix} -i & 1-i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix}$, $[1 - i \ i]^H = \begin{bmatrix} 1+i \\ -i \end{bmatrix}$.
- T** **Az adjungált tulajdonságai** Legyenek $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ komplex mátrixok, c komplex szám. Ekkor
1. $(\mathbf{A}^H)^H = \mathbf{A}$,
 2. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^H = \mathbf{A}^H + \mathbf{B}^H$,
 3. $(c\mathbf{A})^H = \bar{c}\mathbf{A}^H$
 4. $(\mathbf{AB})^H = \mathbf{B}^H\mathbf{A}^H$.
- m** A valós transzponálás kiterjesztése.

Skaláris szorzás definíciója

- D** **Komplex vektorok skaláris szorzata** A $\mathbb{C}^n$ -beli $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ és $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ vektorok skaláris szorzatán a
 $\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} := \overline{z_1}w_1 + \overline{z_2}w_2 + \dots + \overline{z_n}w_n = \mathbf{z}^H \mathbf{w}$ komplex skalárt értjük.
- P** $(1, i)$ és (i, i) szorzatai:

$$(1, i) \cdot (1, i) = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = 1 - i^2 = 2,$$

$$(i, i) \cdot (i, i) = \begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix} = -i^2 - i^2 = 2,$$

$$(1, i) \cdot (i, i) = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix} = i - i^2 = 1 + i,$$

$$(i, i) \cdot (1, i) = \begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = -i - i^2 = 1 - i.$$

A komplex skaláris szorzás tulajdonságai

T Legyen $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$, és legyen $c \in \mathbb{C}$. Ekkor

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}$

2. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w},$

3. $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \bar{c}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ és $\mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v}) = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}),$

4. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} > 0$, ha $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, és $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$, ha $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

m Kiterjesztése a valós skaláris szorzatnak!

m A harmadik tulajdonságban felsoroltak bármelyike következik a másiktól az első alapján.

m Komplex vektor önmagával vett skaláris szorzata valós!

Komplex euklideszi tér

D L! $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$ egy vektortér, és $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan függvény, melyre bármely $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ vektorok és $c \in \mathbb{C}$ skalár esetén

$$C1 \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle} \quad \text{konjugált szimmetria}$$

$$C2 \quad \langle \mathbf{u}, c\mathbf{v} \rangle = c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \quad \text{homogenitás a 2. változóban}$$

$$C3 \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \quad \text{additivitás}$$

$$C4 \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0, \text{ ha } \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \quad \text{pozitivitás}$$

E $\langle \cdot, \cdot \rangle$ függvényt a $\mathcal{V}$ -n értelmezett **komplex skaláris szorzásnak**, a skaláris szorzással ellátott $\mathcal{V}$ vektorteret **komplex euklideszi térnek**, vagy $\mathbb{C}$ fölötti euklideszi térnek nevezzük.

m Az első változóban a szorzás nem homogén, hisz

$$\langle cu, v \rangle = \overline{\langle v, cu \rangle} = \overline{c \langle v, u \rangle} = \bar{c} \overline{\langle v, u \rangle} = \bar{c} \langle u, v \rangle .$$

A komplex skaláris szorzás az első változóban nem lineáris, hanem ún. konjugált lineáris. Maga a komplex skaláris szorzás így nem bilineáris (hanem ún. szeszkvilineáris, vagy másféllineáris).

m A komplex skaláris szorzás definíciója a valós skaláris általánosítása, annak nem mond ellent.

Példák komplex euklideszi terekre

- P** $\mathbb{C}^n$ -beli skaláris szorzás Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertálható mátrix.
Ekkor a

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^H \mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{y}$$

skaláris szorzás $\mathbb{C}^n$ -ben.

- M** A C1-C4 ellenőrzése helyett: jelölje $\mathcal{B}$ az $\mathbf{A}$ oszlopvektoraiból álló rendszert, ami $\mathbf{A}$ invertálhatósága miatt bázis, így $\mathbf{A}$ a $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}$ áttérés mátrixa: $\mathbf{x}_{\mathcal{E}} = \mathbf{A}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} \mathbf{x}_{\mathcal{B}}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= \mathbf{x}_{\mathcal{E}}^H \mathbf{y}_{\mathcal{E}} = (\mathbf{A}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} \mathbf{x}_{\mathcal{B}})^H \mathbf{A}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} \mathbf{y}_{\mathcal{B}} \\ &= \mathbf{x}_{\mathcal{B}}^H \mathbf{A}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}^H \mathbf{A}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} \mathbf{y}_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

Így az

$$\mathbf{x}^H \mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{y}$$

képlet a standard skaláris szorzás eredménye a $\mathcal{B}$ bázisban felírva.

Példák komplex euklideszi terekre

- P** $\mathcal{C}[a, b]$ -beli skaláris szorzás A folytonos $[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ függvények $\mathcal{C}[a, b]$ vektorterén az

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \bar{f}g$$

integrál komplex skaláris szorzást definiál.

- M** Legyen $f, g, h \in \mathcal{C}[a, b]$ és $c \in \mathbb{C}$. Ekkor

$$C1: \langle f, g \rangle = \int_a^b \bar{f}g = \int_a^b g\bar{f} = \int_a^b \overline{\bar{g}f} = \overline{\langle g, f \rangle}$$

$$C2: \langle cf, g \rangle = \int_a^b \bar{c}\bar{f}g = \bar{c} \int_a^b \bar{f}g = \bar{c} \langle f, g \rangle,$$

$$\langle f, cg \rangle = \int_a^b \bar{f}(cg) = c \int_a^b \bar{f}g = c \langle f, g \rangle,$$

$$C3: \langle f, g + h \rangle = \int_a^b \bar{f}(g + h) = \int_a^b \bar{f}g + \int_a^b \bar{f}h = \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle.$$

$$C4: \langle f, f \rangle = \int_a^b \bar{f}f = \int_a^b |f|^2 > 0, \text{ ha } f \text{ nem a zérusfüggvény, és természetesen a zérusfüggvényre } \langle 0, 0 \rangle = 0.$$

Távolság és a merőleges vetítés komplex terekben

- D** **Komplex vektorok hossza, távolsága, merőlegessége** A komplex $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ vektor **hossza, abszolút értéke** vagy **normája** $\|\mathbf{u}\| = |\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$, **két vektor távolsága** megegyezik különbségük hosszával, azaz $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ vektorok esetén $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$. Két vektort **merőlegesnek** tekintünk, ha skaláris szorzatuk 0. Két vektor szöge nem definiálható a szokásos módon.

T **Merőleges és párhuzamos összetevő**

Az $\mathbf{x}$ vektornak az $\mathbf{e}$ egységvektor egyenesére eső merőleges vetülete: $\mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}) = (\mathbf{e}\mathbf{e}^H)\mathbf{x}$,
 $\mathbf{x}$ rá merőleges összetevője: $\mathbf{x} - \mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}) = (\mathbf{I} - \mathbf{e}\mathbf{e}^H)\mathbf{x}$.

B $\mathbf{e}\mathbf{e}^H\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{e}\mathbf{e}^H\mathbf{x}) = (\mathbf{e}\mathbf{e}^H\mathbf{x})^H(\mathbf{x} - \mathbf{e}\mathbf{e}^H\mathbf{x}) = \mathbf{x}^H\mathbf{e}\mathbf{e}^H\mathbf{x} - \mathbf{x}^H\mathbf{e}\mathbf{e}^H\mathbf{e}\mathbf{e}^H\mathbf{x} = 0$

T

Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség

Legyen $\mathcal{V}$ egy valós vagy komplex euklideszi tér. Tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ vektorra

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ lineárisan összefüggők, azaz ha egyik vektor a másik skalárszorosa.

B Ha $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, akkor a tétel állításának mindkét része nyilván igaz.

- Ha $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, akkor legyen $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$.

- Az $\mathbf{y}$ vektor $\mathbf{e}$ -re merőleges összetevője: $\mathbf{y} - \mathbf{e} \langle \mathbf{e}, \mathbf{y} \rangle$.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|\mathbf{y} - \mathbf{e} \langle \mathbf{e}, \mathbf{y} \rangle\|^2 \\ &= \langle \mathbf{y} - \mathbf{e} \langle \mathbf{e}, \mathbf{y} \rangle, \mathbf{y} - \mathbf{e} \langle \mathbf{e}, \mathbf{y} \rangle \rangle \\ &\stackrel{C3}{=} \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{e} \langle \mathbf{e}, \mathbf{y} \rangle \rangle - \langle \mathbf{e} \langle \mathbf{e}, \mathbf{y} \rangle, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{e} \langle \mathbf{e}, \mathbf{y} \rangle, \mathbf{e} \langle \mathbf{e}, \mathbf{y} \rangle \rangle \\ &\stackrel{C2}{=} \|\mathbf{y}\|^2 - \langle \mathbf{e}, \mathbf{y} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{e} \rangle - \overline{\langle \mathbf{e}, \mathbf{y} \rangle} \langle \mathbf{e}, \mathbf{y} \rangle + \overline{\langle \mathbf{e}, \mathbf{y} \rangle} \langle \mathbf{e}, \mathbf{y} \rangle \langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle \\ &= \|\mathbf{y}\|^2 - \langle \mathbf{e}, \mathbf{y} \rangle \overline{\langle \mathbf{e}, \mathbf{y} \rangle} - \overline{\langle \mathbf{e}, \mathbf{y} \rangle} \langle \mathbf{e}, \mathbf{y} \rangle + \overline{\langle \mathbf{e}, \mathbf{y} \rangle} \langle \mathbf{e}, \mathbf{y} \rangle \\ &= \|\mathbf{y}\|^2 - \|\langle \mathbf{e}, \mathbf{y} \rangle\|^2 \\ &= \|\mathbf{y}\|^2 - \frac{\|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle\|^2}{\|\mathbf{x}\|^2}. \end{aligned}$$

Ebből átrendezéssel $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ ✓

- Egyenőség akkor áll fenn, ha $\mathbf{y} - \mathbf{e} \langle \mathbf{e}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ lin.ö.f.

Két további alaptétel

- T Háromszög-egyenlőtlenség** L! $\mathcal{V}$ (valós vagy komplex) euklideszi tér. Ekkor bármely $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ vektorra $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.
 $= \iff$ egyik vektor a másik nemnegatív ($\in \mathbb{R}$) konstansszorososa.
- T Pithagorász-tétel** L! $\mathcal{V}$ komplex vagy valós euklideszi tér. Ha $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, akkor $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$.
- B**
- $$\begin{aligned}\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle \\ &\stackrel{\text{C3}}{=} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle} + \|\mathbf{y}\|^2 \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.\end{aligned}$$
- Ha $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, akkor $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$, így $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$.
- m** A megfordítása csak valósban igaz! ($\operatorname{Re} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0 \iff \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$).
- P** $\mathbf{x} = (1, i)$, $\mathbf{y} = (2i, 1)$ nem merőlegesek, de $|(1, i)|^2 = 2$, $|(2i, 1)|^2 = 5$, $|(1 + 2i, 1 + i)|^2 = 7$, azaz $|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2$.