BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

Haladó lineáris algebra

BMETE90MX54 (FELSŐBB MATEMATIKA VILLAMOSMÉRNÖKÖKNEK)

Az elemi sorműveletek

AZ ELEMI LINEÁRIS ALGEBRA SVÁJCI BICSKÁJA

Wettl Ferenc
ALGEBRA TANSZÉK

Az elemi lineáris algebra svájci bicskája = elemi sorműveletek

Ismeretek, képességek, célok

- Lineáris kombináció (üres halmazé is), függetlenség, függőség
- Lépcsős alak/Gauss, redukált lépcsős alak/Gauss–Jordan
- Egyenletrendszer megoldáshalmaza
- Generátorrendszer, bázis, dimenzió
- Kitüntetett alterek: $\mathcal{N}(\mathsf{A})$, $\mathcal{S}(\mathsf{A}) = \mathcal{O}(\mathsf{A}^\mathsf{T})$, $\mathcal{O}(\mathsf{A}) = \mathcal{S}(\mathsf{A}^\mathsf{T})$, $\mathcal{N}(\mathsf{A}^\mathsf{T})$
- A lineáris algebra alaptétele
- A sortérbe eső egyetlen megoldás
- Determináns definíciója és kiszámítása

Aki már nem emlékszik a test és a vektortér fogalmára, az az első előadáson $\mathbb{F}$ test alatt értse az $\mathbb{R}$ vagy a $\mathbb{C}$ testet, $\mathbb{F}$ fölötti $\mathcal{V}$ vektortéren pedig az $\mathbb{R}^n$ vagy az $\mathbb{R}^\infty$ tereket. Az előbbi vektorai a rendezett szám-n-esek, míg az utóbbi vektorai az olyan végtelen sorozatok, melyekben véges sok elemet kivéve minden elem 0.

Elemi sorműveletek, lépcsős alak

Elemi sorműveletek

- Egy mátrix sorain végzett alábbi műveleteket elemi sorműveleteknek nevezzük:
    - Sorcsere: két sor cseréje ($S_i \leftrightarrow S_j$: az i-edik és a j-edik sorok cseréje.)
    - Beszorzás: egy sor beszorzása egy nemnulla számmal (cS_i: az i-edik sor beszorzása c-vel, ahol $c \neq 0$)
    - Hozzáadás: egy sorhoz egy másik sor konstansszorosának hozzáadása ($S_i + cS_j$: a j-edik sor c-szeresének az i-edik sorhoz adása).
- Hasonlóan definiálhatók az elemi oszlopműveletek ($O_i \leftrightarrow O_j$, cO_i, $O_i + cO_j$).

Lépcsős alak

D Egy mátrix lépcsős alakú, ha

1. a 0-sorok (ha vannak) a mátrix utolsó sorai;
2. bármely két egymás után következő nem-0 sorban az alsó sor elején (legalább eggyel) több 0 van, mint a fölötte lévő sor elején.

A nemnulla sorok első zérustól különböző elemét főelemnek, vezérelemnek vagy pivotelemnek hívjuk. Egy főelem oszlopának főoszlop vagy bázisoszlop a neve.

- A következő mátrixok lépcsős alakúak:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lépcsős alak és rang

T Bármely test feletti mátrix elemi sorműveletekkel lépcsős alakra hozható.

B

1. bal oldali nulloszlopok letakarása
2. sorcsere után $a_{11} \neq 0$
3. $S_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} S_1$ után a_{11} alatt minden elem 0.
4. takarjuk le az első oszlopot és az első sort, és ha nincs több sor, VÉGE, ha van, menjünk a 1 pontra.

T Egy mátrix bármely lépcsős alakjában azonos a nemzérus sorok száma, és

D e számot a mátrix rangjának nevezzük.

Redukált lépcsős alak (`rref` = reduced row echelon form)

D Egy mátrix redukált lépcsős, ha

1. lépcsős alakú;
2. minden főelem egyenlő 1-gyel;
3. a főelemek oszlopaiban a főelemeken kívül minden elem 0;

- Vezéregyes
- A következő mátrixok redukált lépcsős alakúak:

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1 & -2 & 0 & -4\\0 & 0 & 1 & 6\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

- Algoritmus: oszloponként haladva először a vezérelemek alatt, majd csak utána az utolsó oszloptól kezdve fölöttük eliminálunk!

Redukált lépcsős alakra hozás

P Hozzuk redukált lépcsős alakra az $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ mátrixot!

M1
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[S_3-2S_1]{S_2-S_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}S_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[S_1-3S_2]{S_3+4S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

M2
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[S_3-2S_1]{S_2-S_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[S_1-S_2]{\frac{1}{2}S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

T **A redukált lépcsős alak egyértelmű**

Egy test elemeiből képzett bármely mátrix redukált lépcsős alakra hozható. Ez az alak egyértelmű.

- A MATLAB-típusú nyelvekben `rref()` ez a függvény.

Egyenletrendszerek megoldása

Gauss-módszer

D Az egyenletrendszer konzisztens, ha van megoldása, egyébként inkonzisztens.

m A Gauss-módszer, -kiküszöbölés vagy -elimináció: lin.egy.rsz. megoldása lépcsős alakra hozással (oszloponként haladva). A főoszlopok változói: kötött változók, a többi a szabad. Megoldás visszahelyettesítéssel (backward substitution).

P Oldjuk meg az $\begin{aligned} x+y+z&=2\\ y+z&=3 \end{aligned}$ egyenletrendszert Gauss-módszerrel!

M Az egy.rsz. bővített mátrixa már lépcsős alakú: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$, így a megoldás visszahelyettesítésekkel megkapható:

$$\begin{bmatrix} x\\ y\\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\\ 3-t\\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\\ 3\\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0\\ -1\\ 1 \end{bmatrix} t.$$

Gauss–Jordan-módszer (megoldás rref-ra hozással)

P
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{\dots} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-S_3]{1/2 S_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[S_1-2S_3]{S_2-\frac{1}{2}S_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{S_1-S_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{rcr} x & = & 1 \\ y & = & 3 \\ z & = & -2 \end{array}$$

- Tehát az egyenletrendszer egyetlen megoldása $(x, y, z) = (1, 3, -2)$.

Gauss–Jordan-módszer – több megoldás

- $$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\cdots} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[S_1 - S_2]{1/2 S_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{aligned} x_1 + 2x_2 \quad + \frac{3}{2}x_4 + x_5 &= \frac{3}{2} \\ x_3 + \frac{1}{2}x_4 \quad &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

A kötött változók: x_1, x_3, a szabad változók: $x_2 = s, x_4 = t, x_5 = u$.

- $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A megoldások terei

Nulltér

T Egy n-ismeretlenes $\mathbb{F}$ testbeli együtthatós homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza alteret alkot $\mathbb{F}^n$-ben (azaz zárt a vektorok összeadására és skalárral szorzására nézve).

D Az $\mathbf{A}$ együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak alterét az $\mathbf{A}$ mátrix nullterének nevezzük és $\mathcal{N}(\mathbf{A})$-val jelöljük.

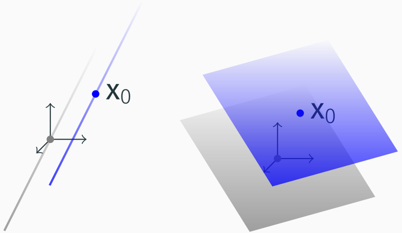
P Határozzuk meg a $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix nullterét:

M $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

T **Homogén és inhomogén egyenletrendszer megoldásai**

Az inhomogén lineáris $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *egyenletrendszerre:*

$$\boxed{\begin{array}{c}\textit{inhomogén}\\ \textit{összes}\\ \textit{megoldása}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\textit{inhomogén egy}\\ \textit{tetszőleges}\\ \textit{megoldása}\end{array}} + \boxed{\begin{array}{c}\mathbf{Ax} = \mathbf{0}\ \textit{homogén}\\ \textit{rész összes}\\ \textit{megoldása}\end{array}}$$



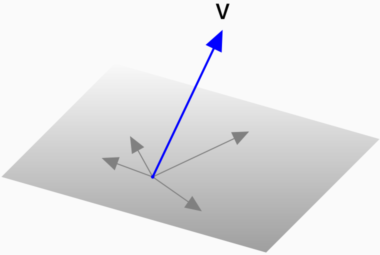
Lineáris függetlenség

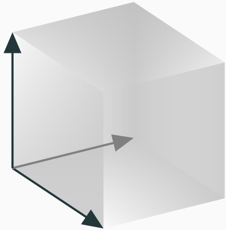
		Explicit vektoregyenlet	Implicit egyenlet(rendszer)
Síkban	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	$Ax + By = C$
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	$A_1x + B_1y = C_1$ $A_2x + B_2y = C_2$
Térben	sík	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$	$Ax + By + Cz = D$
	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	$A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	$A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$ $A_3x + B_3y + C_3z = D_3$
$\mathbb{R}^n$-ben	hipersík	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t_1\mathbf{u}_1 + \ldots + t_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}$	$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$
	sík	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$	$n - 2$ független?? egyenlet
	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	$n - 1$ független?? egyenlet
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	n független?? egyenlet

Vektorok lineáris függetlensége, lineáris összefüggősége

D $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\} \subseteq \mathcal{V}_{\mathbb{F}}$ lineáris kombinációja $\sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{v}_i$ $(c_i \in \mathbb{F})$.

Az üres vektorhalmaz bármely lin.komb-ja $\mathbf{0}$.





D $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ lineárisan független, ha egyik sem áll elő a többi lin.komb-jaként. (egy vektorra is jó: $\{\mathbf{v}\}$ független, ha $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$)

Lineárisan függő, ha nem független (van olyan, amelyik előáll)

T $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ lin.független $\iff$ $\sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ csak $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$ esetén áll fenn.

Lineáris függetlenség végtelen sok vektor esetén, bázis

D AMH a $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n, \dots\}$ véges vagy végtelen vektorhalmaz lineárisan független, ha minden véges részhalmaza lineárisan független.

D AMH $\mathcal{B}$ generátorrendszer $\mathcal{V}$-ben (kifeszíti $\mathcal{V}$-t), ha bármely $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektor előáll véges sok $\mathcal{B}$-beli lineáris kombinációjaként.

D AMH $\mathcal{B}$ a $\mathcal{V}$ egy bázisa, ha (1) lineárisan független, (2) generátorrendszer.

T Minden vektortérnek van bázisa.

A zérustéré az üreshalmaz. (Zérustér $= \{\mathbf{0}\}$)

Bázis és dimenzió

Á L! $\mathcal{V}$ vektortér, és $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\} \subseteq \mathcal{V}$. A következők ekvivalensek:

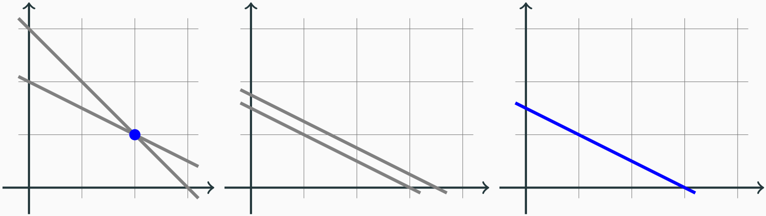
- $\mathcal{B}$ lineárisan független generátorrendszere $\mathcal{U}$-nak (azaz bázis),
- $\mathcal{B}$ minimális generátorrendszer,
- $\mathcal{B}$ maximális független vektorokrendszer.

T Bázis-tétel Ha a $\mathcal{V}$ vektortérnek van n-elemű bázisa, akkor minden bázisa n-elemű.

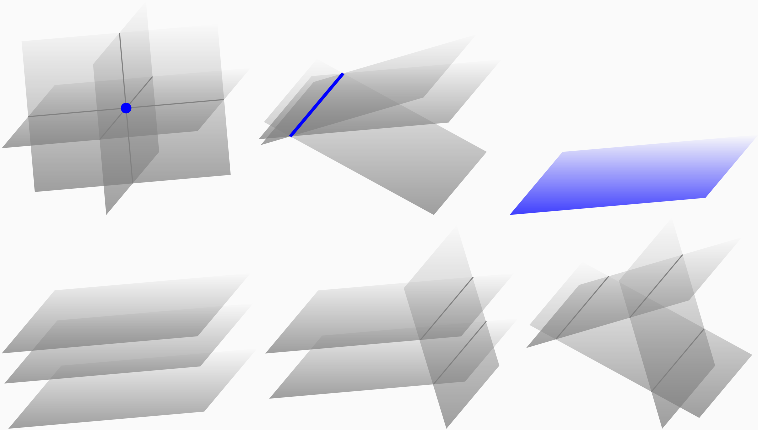
D A $\mathcal{V}$ vektortér n-dimenziós, ha van n-elemű bázisa. (véges dimenziós vektortér)

Sormodell: lin. egyenletrendszer mo-a = hipersíkok metszete

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned} \quad \text{az} \quad \begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x + 4y &= 7 \end{aligned} \quad \text{és az} \quad \begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x + 4y &= 6 \end{aligned}$$



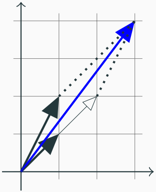
Sormodell 3D-ben

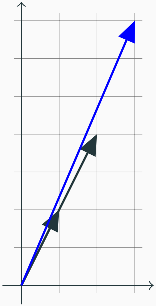


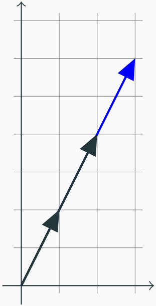
Oszlopmodell: jobb oldal = oszlopvektorok lineáris komb-ja

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x + 4y &= 7 \end{aligned} \quad \text{és} \quad \begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x + 4y &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}x + \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}y = \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}x + \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}y = \begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}x + \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}y = \begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}.$$







Kifeszített altér

D a $\mathcal{W} = \{ \mathbf{v}_i \in \mathcal{V}_{\mathbb{F}} : i = 1, 2, \dots \}$ vektorrendszer által kifeszített altér $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots)$ az összes belőlük képzett lineáris kombinációk altere, azaz

$$\left\{ c_{i_1}\mathbf{v}_{i_1} + \dots + c_{i_k}\mathbf{v}_{i_k} : c_{i_1}, \dots, c_{i_k} \in \mathbb{F},\ \mathbf{u}_{i_1}, \dots, \mathbf{u}_{i_k} \in \mathcal{W} \right\}.$$

Á $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots) \leqslant \mathcal{V}$, azaz altér.

Á $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots)$ a minimális altér azok között, melyek tartalmazzák a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots$ vektorokat.

Egyenletrendszer megoldhatóságának feltétele

D Egy mátrix oszlopvektorai által kifeszített alteret oszloptérnek, a sorvektorai által kifeszített alteret sortérnek nevezzük.

Á Az $\mathsf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$ mátrix sortere $\mathbb{F}^n$ altere, oszloptere $\mathbb{F}^m$ altere.

J A sortere: $\mathcal{S}(\mathsf{A})$ vagy $\mathrm{Row}(\mathsf{A})$, oszloptere: $\mathcal{O}(\mathsf{A})$ vagy $\mathrm{Col}(\mathsf{A})$

T ($\mathbf{b} \in \mathcal{O}(\mathsf{A})$ feltétel) Az $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $\mathbf{b}$ előáll az A oszlopainak lineáris kombinációjaként ($\mathbf{b}$ benne van A oszlopterében). A lineáris kombináció együtthatói megegyeznek a megoldásvektor koordinátáival.

T (Mátrixrangos feltétel) Az $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha az együtthatómátrix és a bővített mátrix rangja megegyezik, azaz ha

$$\mathrm{r}(\mathsf{A}) = \mathrm{r}(\mathsf{A}|\mathbf{b}).$$

A lineáris algebra alaptétele

Sortér és oszloptér változása elemi sorműveletek közben

T **Sortér és oszloptér változása**

Elemi sorműveletek közben a

- *sortér nem változik és az*
- *oszlopvektorok közti lineáris kapcsolatok nem változnak.*

K Legyen $\mathbf{B}$ az $\mathbf{A}$ mátrix egy lépcsős alakja. Ekkor

1. $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ sortere megegyezik,
2. az $\mathbf{A}$ oszlopvektorai közt lévő lineáris kapcsolatok azonosak a $\mathbf{B}$ ugyanolyan sorszámú oszlopai közti lin. kapcsolatokkal,
3. $\mathbf{B}$ nemzérus sorvektorai lineárisan függetlenek,
4. a főoszlopok $\mathbf{A}$-ban és $\mathbf{B}$-ben is lineárisan függetlenek.

Mátrix, rang, dimenzió

Á **Dimenzió $=$ rang**

Egy mátrix rangja, sorterének dimenziója és oszlopterének dimenziója megegyezik. (Ebből következőleg $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}^T)$.)

T **Dimenziótétel – rang–nullitási tétel**

Bármely $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m\times n}$ mátrix esetén a sortér dimenziójának (=rangjának) és a nulltér dimenziójának (=nullitásának) összege n. Képlettel:

$$\dim(\mathcal{S}(\mathbf{A})) + \dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = n.$$

B kötött változók száma + szabad változók száma = n

Valós mátrixok sor- és nulltere

D Egy valós vektortér két altere merőleges, ha bárhogy választva egy vektort az egyik, egy másikat a másik altérből, azok merőlegesek.

D Két altér kiegészítő altér, ha $\mathcal{V}$ bármely vektora egyértelműen előáll az egyik és a másik altérbe eső vektorok összegeként.

D A $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$ altér merőlegesén a rá merőleges vektorok alterét értjük, jele $\mathcal{W}^\perp$ („W perp”).

T **A lineáris algebra alaptétele**

Minden valós mátrix sortere és nulltere merőleges kiegészítő alterei egymásnak.

K $\mathcal{S}(\mathsf{A})^\perp = \mathcal{N}(\mathsf{A})$, $\mathcal{O}(\mathsf{A}^\mathsf{T})^\perp = \mathcal{N}(\mathsf{A})$, $\mathcal{N}(\mathsf{A})^\perp = \mathcal{S}(\mathsf{A})$, $\mathcal{O}(\mathsf{A})^\perp = \mathcal{N}(\mathsf{A}^T)$.

K Minden $\mathbf{x}$ vektor egyértelműen előáll egy sortérbe és egy nulltérbe eső vektor összegeként.

D Az A mátrix négy kitüntetett altere: $\mathcal{S}(\mathsf{A})$, $\mathcal{N}(\mathsf{A})$, $\mathcal{O}(\mathsf{A})$, $\mathcal{N}(\mathsf{A}^T)$.

Az elemi sorműveletek alkalmazásai

Az altérbe tartozás vizsgálata

P Határozzuk meg, hogy a $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 2, -2, 1)$ és $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1, 1)$ vektorok által kifeszített altérnek eleme-e az $\mathbf{u} = (-1, 2, -3, 6)$ vektor! Adjunk meg egy ezt bizonyító lineáris kombinációt! Mutassuk meg, hogy a $\mathbf{w} = (-1, 2, -3, 4)$ vektor nem eleme az altérnek!

M $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}\ (= \mathbf{w})$ megoldását keressük. A szimultán egyenletrendszer mátrixa $[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3 \mid \mathbf{u}\ \mathbf{w}]$.

$$\left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 6 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

amiből $(x_1, x_2, x_3) = (3, 2, -2)$, és $\mathbf{w}$ valóban nem áll elő lineáris kombinációként, mert a $\mathbf{w}$-t tartalmazó egyenletrendszer ellentmondásos.

Lineáris függetlenség eldöntése

K Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_k\end{bmatrix}$! Az alábbi állítások ekvivalensek:

- az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ vektorok lineárisan függetlenek;
- az $\mathbf{A}$ együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszernek a triviálison kívül nincs más megoldása;
- az $\mathbf{A}$ lépcsős alakjának minden oszlopában van főelem, azaz $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = k$.

P Mutassuk meg, hogy a 4-dimenziós $(1, 2, 3, 4)$, $(0, 1, 0, 1)$ és $(1, 1, 1, 0)$ vektorok lineárisan függetlenek.

M A vektorokból képzett mátrix és lépcsős alakja

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ami azt mutatja, hogy a hom.lin.egyrsz-nek csak egyetlen megoldása van, azaz az oszlopvektorok lineárisan függetlenek.

Altér bázisának meghatározása – sorvektorokkal

P Határozzuk meg az $(1, 1, 0, -2)$, $(2, 3, 3, -2)$, $(1, 2, 3, 0)$ és $(1, 3, 6, 2)$ vektorok által kifeszített altér egy bázisát!

1M Sorvektorokkal:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A bázis vektorai $(1, 1, 0, -2)$, $(0, 1, 3, 2)$.

Altér bázisának meghatározása – oszlopvektorokkal

2M oszlopvektorokkal a redukált lépcsős alakból:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ennek alapján:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = -3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Koordinátás alak felírása (az előbbi bázisban)

P Jelölje $\mathcal{B} = \{(1,1,0,-2),(2,3,3,-2)\}$ a bázist. A redukált lépcsős alak nemzérus soraiból

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

kapjuk a négy vektor koordinátás alakjait:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \ \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Sortérbe eső egyetlen megoldás

Valós együtthatós egyenletrendszer megoldásai

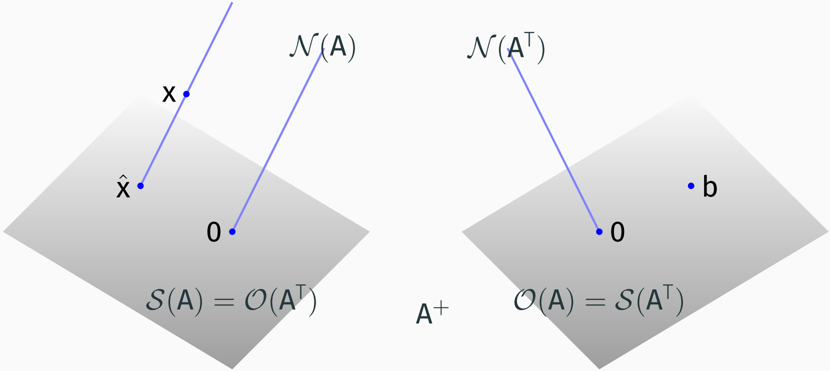
T

Lineáris egyenletrendszer megoldásai

Minden valós együtthatós megoldható (konzisztens) lineáris egyenletrendszerre igazak a következő állítások:

- *egyetlen megoldása esik az együtthatómátrix sorterébe;*
- *a sortérbe eső megoldás az összes megoldás közül a legkisebb abszolút értékű;*
- *az összes megoldás előáll úgy, hogy a sortérbe eső megoldáshoz hozzáadjuk a homogén rész összes megoldását.*

- Legyen $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $\mathrm{r}(\mathsf{A}) = 2$.
- Ekkor $\dim(\mathcal{S}(\mathsf{A})) = \dim(\mathcal{O}(\mathsf{A})) = 2$, $\dim(\mathcal{N}(\mathsf{A})) = 3 - 2 = 1$.



A sortérbe eső megoldás meghatározása

P Állítsuk elő a következő egyenletrendszer összes megoldását a sortérbe eső egyetlen megoldás segítségével.

$$x+y+z+w=3$$
$$x+y-z-w=1$$

M A bővített mátrix és redukált lépcsős alakja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-s \\ s \\ 1-t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

- A nullteret a $(-1,1,0,0)$ és a $(0,0,-1,1)$ vektorok feszítik ki. A sortérbe eső megoldásvektor ezekre merőleges:

$$\begin{aligned} -x+y \qquad\qquad &= 0 \\ -z+w &= 0 \end{aligned}$$

- Ezekkel kibővítve az egyenletrendszert, majd megoldva

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

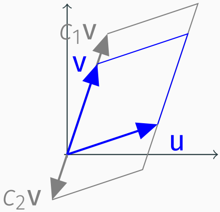
tehát a sortérbe eső mo.: $(1,1,1/2,1/2)$, az összes mo.:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

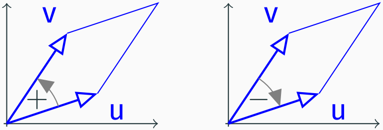
Determináns

Motiváció: paralelogramma előjeles területe

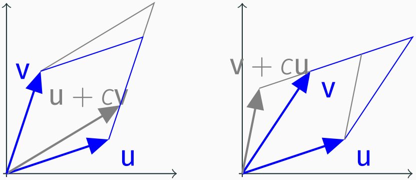
Á $f(c\mathbf{u}, \mathbf{v}) = cf(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, és $f(\mathbf{u}, c\mathbf{v}) = cf(\mathbf{u}, \mathbf{v})$



Á $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -f(\mathbf{v}, \mathbf{u})$



Á $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{u} + c\mathbf{v}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{v} + c\mathbf{u})$



Definíció

D

Determináns (elemi sorműveletekkel)

Determináns az a test fölötti négyzetes mátrixokon értelmezett skalár értékű függvény, amely

D1 értéke c-szeresére változik, ha egy sorát c-vel szorozzuk,
D2 -1-szeresére változik különböző sorok fölcserélésekor,
D3 nem változik a hozzáadás sorművelete közben,
D4 az egységmátrixhoz 1-et rendel.

Definíció

- m det kiszámítása: elemi sorműveletekkel a determinánst olyan alakra hozzuk, melynek vagy van egy zérussora, vagy háromszög alakú.
- P Pascal-háromszögből képzett mátrix determinánsa:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$