1. Számítsuk ki az alábbi vektorok megadott normáit!

$$\mathbf{u} = (3, -\mathrm{i}, 6\mathrm{i}, 3),\ \mathbf{v} = (0.1, -0.2, -0.2),\ p = 1, 2, \infty;$$
$$\mathbf{w} = (3, 4, 5), p = 3.$$

Megoldás. $\|\mathbf{u}\|_1 = |3| + |-\mathrm{i}| + |6\mathrm{i}| + |3| = 13$,
$\|\mathbf{u}\|_2 = \sqrt{\mathbf{u}^{\mathsf{H}}\mathbf{u}} = \sqrt{55}$,
$\|\mathbf{u}\|_\infty = \max(|3|, |-\mathrm{i}|, |6\mathrm{i}|, |3|) = 6$,
$\|\mathbf{v}\|_1 = |0.1| + |-0.2| + |-0.2| = 0.5$,
$\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{0.1^2 + 0.2^2 + 0.2^2} = 0.3$,
$\|\mathbf{v}\|_\infty = \max(|0.1| + |-0.2| + |-0.2|) = 0.2$,
$\|\mathbf{w}\|_3 = \sqrt[3]{3^3 + 4^3 + 5^3} = 6$.

2. Számítsuk ki az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix},\quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrixok Frobenius-, 1-, 2- és ∞ normáját.

Megoldás. $\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{4 + 16 + 16 + 64} = 10$,

$$\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \\ \hline 6 & 12 & \end{array} \rightsquigarrow \|\mathbf{A}\|_1 = \|\mathbf{A}\|_\infty = 12$$

$\mathbf{A}$ szimmetrikus, így $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}$ legnagyobb abszolútértékű sajátértékének gyökét $\mathbf{A}$ sajátértékeiből is megkaphatjuk. $\mathbf{A}$ sajátértékei 0, és 10, így $\sigma_1 = 10$, tehát $\|\mathbf{A}\|_2 = 10$.

$\|\mathbf{B}\|_F = \sqrt{9 + 16} = 5$,

$$\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 4 & \end{array} \rightsquigarrow \|\mathbf{B}\|_1 = 4,\ \|\mathbf{B}\|_\infty = 7$$

$\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathsf{T}}$ sajátértékei 25, 0, így $\|\mathbf{B}\|_2 = 5$.

$\|\mathbf{C}\|_F = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$,

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ \hline 5 & 5 & 5 & \end{array} \rightsquigarrow \|\mathbf{C}\|_1 = \|\mathbf{C}\|_\infty = 5$$

$\mathbf{C}^{\mathsf{T}}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \mathbf{C}^{\mathsf{T}}\mathbf{C}$ sajátértéke 9, így $\|\mathbf{C}\|_2 = 3$.

3. Van-e olyan valós elemű mátrix, amelynek karakterisztikus és minimálpolinomja a következő?
a) $\chi(x) = (x-1)^2(x-2)^2$, $\mu(x) = (x-1)(x-2)^2$
b) $\chi(x) = x^6 + x + 1$, $\mu(x) = x^2 + x + 1$
c) $\chi(x) = -(x-1)^2(x-2)^2(x-5)$, $\mu(x) = (x-1)^2(x-2)^2$
d) $\chi(x) = (x^3 - x - 4)^2$, $\mu(x) = (x^3 - x - 4)$

Megoldás. *a)* Van:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

b) Nincs, mert a minmálpolinom nem osztója a karakterisztikus polinomnak. (Erről polinomosztással vagy a másodfokú polinom gyökeinek a hatodfokúba való helyettesítésével is meggyőződhetünk.) Egy egyszerűbb megoldás: ha osztója lenne, akkor osztaná a különbségüket is, de a különbség

$$x^6 - x^2 = x^2(x^4 - 1) = x^2(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)$$

nem osztható vele.
c) Nincs, mert a minimálpolinomnak nem gyöke az 5, a karakterisztikusnak viszont igen.
d) Van, a

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Frobenius kisérőmátrixra $\chi_{\mathbf{B}}(x) = \mu_{\mathbf{B}}(x) = x^3 - x - 4$, így az

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

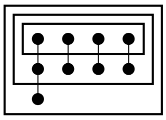
mátrix minimálpolinomja változatlanul $\mu_{\mathbf{A}}(x) = x^3 - x - 4$, hisz $\mathbf{A}$ polinomjának blokkdiagonális elemei $\mathbf{B}$ azonos polinomjai, de $\chi_{\mathbf{A}}(x) = (x^3 - x - 4)^2$.

4. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix $\chi(x)$ karakterisztikus polinomjának konstans tagja -1. Van-e olyan legfeljebb $(n-1)$-edfokú p polinom, melyre $\mathbf{A}^{-1} = p(\mathbf{A})$? Ha igen, adjuk meg a χ polinom segítségével!

Megoldás. Mivel χ konstans tagja nem 0, ezért a 0 nem sajátérték, tehát $\mathbf{A}$ invertálható. A Cayley–Hamilton-tétel szerint $\chi(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$, így $\chi(\mathbf{A}) + \mathbf{I} = \mathbf{I}$. Mivel $\chi(x) + 1$ osztható x-szel, ezért $(\chi(\mathbf{A}) + \mathbf{I})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}$, így a $p(x) = (\chi(x) + 1)/x$ polinomra $p(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^{-1}$.

5. Egy 9×9-es $\mathbf{A}$ mátrixnak a 2 kilencszeres algebrai multiplicitású sajátértéke. Az $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^k$ nullterének dimenziója $k = 1, 2, 3$ esetén rendre $4, 8, 9$. Írjuk fel a $\mathbf{J}$ Jordan-féle normálalakot és számítsuk ki az $e^{t\mathbf{J}}$ mátrixot!

Megoldás. A nullitásokból vagy grafikusan (ld. gyak. videó), vagy a rangok kiszámításán keresztül:



k	0		1		2		3	
nullitás			4		8		9	
rang	9		5		1		0	
d_k		4		4		1		0
n_i			0		3		1	

Így három 2×2-es és egy 3×3-as Jordan-blokkból áll a normálalak, és mivel $(\mathrm{e}^{t\lambda})' = t\mathrm{e}^{t\lambda}$, $(\mathrm{e}^{t\lambda})'' = t^2\mathrm{e}^{t\lambda}$ ezért:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

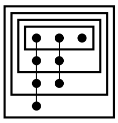
$$\mathrm{e}^{t\mathbf{J}} = \mathrm{e}^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Egy $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{13\times 13}$-as mátrix sajátértékei $\lambda = 1, 2$.

$\mathbf{A} - \mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre:	$10, 8, 6, 5$
$\mathbf{A} - 2\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre:	$11, 9, 8$

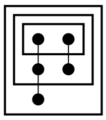
Írjuk fel a karakterisztikus és a minimálpolinomját, valamint Jordan-féle normálalakját!

Megoldás. A $\lambda = 1$ multiplicitása legalább $13 - 5 = 8$, a $\lambda = 2$ multiplicitása legalább $13 - 8 = 5$, de ez ki is adja a 13-adfokú polinomot: $\chi(x) = (1-x)^8(2-x)^5$. A rajz vagy a táblázat $\lambda = 1$-re:



k	0		1		2		3		4	
r_k	13		10		8		6		5	
d_k		3		2		2		1		0
n_i			1		0		1		1	

$\lambda = 2$-re:



k	0		1		2		3	
r_k	13		11		9		8	
d_k		2		2		1		0
n_i			0		1		1	

Ennek alapján a Jordan-normálalak

$$\mathbf{J} = \left[\begin{array}{cccc|ccc|c|ccc|cc}
1 & 1 & & & & & & & & & & & \\
& 1 & 1 & & & & & & & & & & \\
& & 1 & 1 & & & & & & & & & \\
& & & 1 & & & & & & & & & \\ \hline
& & & & 1 & 1 & & & & & & & \\
& & & & & 1 & 1 & & & & & & \\
& & & & & & 1 & & & & & & \\ \hline
& & & & & & & 1 & & & & & \\ \hline
& & & & & & & & 2 & 1 & & & \\
& & & & & & & & & 2 & 1 & & \\
& & & & & & & & & & 2 & & \\ \hline
& & & & & & & & & & & 2 & 1 \\
& & & & & & & & & & & & 2
\end{array}\right]$$

Innen a minimálpolinom $\mu(x) = (1-x)^4(2-x)^3$.

7. Legyen $\mathbf{P}$ egy tetszőleges vetítőmátrix. Fejezzük ki az $\mathrm{e}^{\mathbf{P}}$ mátrixot $\mathbf{P}$ segítségével! (Segítség: írjuk fel az Hermite-polinomot!)

Megoldás. Ha a vetítőmátrix az egész térre vagy a zérustérre vetít, akkor a mátrixa $\mathbf{I}$, ill. $\mathbf{O}$, ezek diagonális mátrixok, így $\mathrm{e}^{\mathbf{I}} = \mathrm{e}\mathbf{I}$, $\mathrm{e}^{\mathbf{O}} = \mathbf{I}$. $\mathbf{P}$ pontosan akkor vetítőmátrix, ha $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$, azaz ha $\mathbf{P}^2 - \mathbf{P} = \mathbf{O}$, ahonnan $\mathbf{P} \neq \mathbf{O}$ és $\neq \mathbf{I}$ esetén $\mu_{\mathbf{P}}(x) = x^2 - x$, és $\mathbf{P}$ sajátértékei 0 és 1. Keressük azt a p polinomot, melyre p megegyezik e^x-szel a $\mathbf{P}$ spektrumán, és amelynek foka legföljebb 1. Legyen $p(x) = ax + b$, ekkor $a \cdot 1 + b = \mathrm{e}^1$, $a \cdot 0 + b = \mathrm{e}^0$, ahonnan $b = 1$ és $a = \mathrm{e} - 1$. Tehát $p(x) = (\mathrm{e}-1)x + 1$, és így $\mathrm{e}^{\mathbf{P}} = (\mathrm{e}-1)\mathbf{P} + \mathbf{I}$. (Ez az $\mathbf{I}$ és $\mathbf{O}$ mátrixokra is jó!)

8. Az alábbi mátrixok közül melyik reducibilis és melyik primitív?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás. Az $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ mátrixoknak megfelelő gráf erősen összefüggő, így ezek a mátrixok irreducibilisek. $\mathbf{C}$ esetén 2-ből nem vezet ki út, így ez a mátrix reducibilis (a második és harmadik sor és oszlop cseréjével a harmadik sor első és második eleme 0). A $\mathbf{D}$ irreducibilis mátrixnak van nemnulla diagonáleleme, így ez primitív. $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mindegyikének négyzete is irreducibilis, valamint van nemnulla diagonálelemük, így primitívek. (Ha négyzetük valamilyen hatványának minden eleme pozitív, akkor az eredeti mátrixoknak is van olyan hatványa, ami pozitív.)

9. Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{smallmatrix}\right]$ mátrix ρ spektrálsugarát és Perron-vektorait. Lehet-e az $\frac{1}{\rho}\mathbf{A}$ mátrix egy Markov-lánc átmenetmátrixa? Ha igen, mi a stacionárius vektor?

Megoldás. A spektrálsugár 5 (mivel a sajátértékek -1 és 5), a hozzá tartozó jobb Perron-vektor $\mathbf{p} = (1/3, 2/3)$, a bal Perron-vektor $\mathbf{q} = (1/2, 1/2)$, hisz ezek az 5-höz tartozó egységnyi 1-normájú pozitív jobb, illetve bal sajátvektorok. Az $\frac{1}{\rho}\mathbf{A}$ sztochasztikus, tehát lehet egy Markov-lánc átmenetmátrixa.

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{\rho}\mathbf{A}\right)^k = \frac{\mathbf{p}\mathbf{q}^\mathsf{T}}{\mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{p}} = \frac{\begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

A stacionárius vektor ennek oszlopvektora: $(1/3, 2/3)$.

10. Ha $\|\mathbf{N}^k\| = 0$, akkor $\mathbf{N}$ nilpotens. Azt mondjuk, hogy $\mathbf{B}$ aszimptotikusan nilpotens, ha $\lim\limits_{k\to\infty}\|\mathbf{B}^k\| = 0$. Így ha $\|\mathbf{B}\| = q < 1$, akkor $\mathbf{B}$ aszimptotikusan nilpotens. Igaz-e, hogy ha $\mathbf{B}$ aszimptotikusan nilpotens, akkor $(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} = \lim\limits_{k\to\infty}(\mathbf{I} + \mathbf{B} + \mathbf{B}^2 + \cdots + \mathbf{B}^k)$? Mutassuk meg, hogy a következő mátrix aszimptotikusan nilpotens.

$$\mathbf{X} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás. Az első állítás igaz, hisz

$$(\mathbf{I} - \mathbf{B})(\mathbf{I} + \mathbf{B} + \ldots + \mathbf{B}^k) = \mathbf{I} - \mathbf{B}^{k+1} \xrightarrow[x\to\infty]{} \mathbf{I}.$$

1. megoldás az $\mathbf{X}$ mátrixra: mivel $\mathbf{X}$ nemnegatív és minden sorösszeg $5/6$, így a spektrálsugár $5/6 < 1$, tehát $\lim_{k\to\infty}\mathbf{X}^k = \mathbf{O}$, azaz $\mathbf{X}$ aszimptotikusan nilpotens.

2. megoldás az $\mathbf{X}$ mátrixra: A norma definíciójából következik, hogy $\|\mathbf{B}^k\| \le \|\mathbf{B}\|^k$, és a normák véges dimenzióban ekvivalensek, ezért, ha csak az egyik is kisebb, mint 1, akkor a mátrix aszimptotikusan nilpotens. Az adott mátrix esetén $\|\mathbf{B}\|_F = \sqrt{\frac{39}{36}} > 1$, $\|\mathbf{B}\|_1 = 1$, $\|\mathbf{B}\|_\infty = \frac{5}{6} < 1$.

11. Mely állítások igazak az alábbiak közül? A választ indokoljuk!

a) Egy irreducibilis mátrix hatványa lehet reducibilis.
b) Egy reducibilis mátrix hatványa lehet irreducibilis.
c) Ha egy irreducibilis mátrix valamely hatványa reducibilis, akkor nem lehet primitív.
d) Ha egy mátrix irreducibilis de nem primitív, akkor van olyan hatványa, ami reducibilis.
e) Ha $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ primitív és $\mathbf{C}^3 = \mathbf{C}$, akkor $\mathbf{C}$ pozitív.

Megoldás. *a)* Igaz. Pl. a $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ mátrix, vagy általában az $[\mathbf{e}_2 \mid \mathbf{e}_3 \mid \cdots \mid \mathbf{e}_n \mid \mathbf{e}_1]$ mátrix, melynek n-edik hatványa $\mathbf{I}$.
b) A definícióból következően hamis.

c) Igaz. Ha $\mathbf{A}$ primitív, akkor van olyan hatványa, amelyiknek minden eleme pozitív, és ettől kezdve minden hatvány minden eleme pozitív. Ha viszont egy mátrix esetén $\mathbf{C} = \mathbf{B}^k$ reducibilis, akkor van olyan elem, hogy minden $\mathbf{C}^m = \mathbf{B}^{mk}$ hatványban ennek helyén 0 áll, így $\mathbf{B}$ nem lehet primitív.

d) Igaz. Mivel $\mathbf{A}$ irreducibilis, a megfelelő gráfban van 1-ből 1-be vezető út, tehát valamelyik $\mathbf{A}^k$ hatványában $a_{1,1}^{(k)} \neq 0$. Ha $\mathbf{A}^k$ irreducibilis lenne, akkor a nemnulla diagonálelem miatt primitív lenne, de akkor $\mathbf{A}$ is primitív lenne, ami ellentmond a feltételnek.

e) Igaz. Ha ugyanis $\mathbf{C}$ primitív, akkor valamely páratlan hatványa pozitív, pl. $\mathbf{C}^{2k+1}$, de a $\mathbf{C}^3 = \mathbf{C}$ helyettesítésekkel $\mathbf{O} < \mathbf{C}^{2k+1} = \mathbf{C}^{2k-1} = \ldots = \mathbf{C}^3 = \mathbf{C}$.

12. Mely állítások igazak az alábbaik közül (I/H)?

a) A sgn függvény (előjelfüggvény) értelmezhető minden olyan valós invertálható mátrixra, melynek minden sajátértéke valós?

b) Minden négyzetes komplex vagy valós mátrixnak értelmezhető a sinusa, mivel a sin függvény definiálva van minden valós vagy komplex mátrix spektrumán.

c) Az $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékhez tartozó általánosított sajátvektorai a 0-vektorral invariáns alteret alkotnak $\mathbf{A}$-ra nézve.

d) Nincs olyan mátrix, amelynek a Jordan-féle normálalakja diagonális.

e) Szimmetrikus mátrix 1- és ∞-normája egyenlő.

f) Sztochasztikus mátrix spektrálsugara 1.

g) Ha egy 3×3-mas valós mátrix soraihoz tartozó Gersgorin-körei páronként diszjunktak, akkor a mátrix sajátértékei valósak.

h) Minden pozitív mátrix pozitív szemidefinit.

i) Ha egy vektor 2-normája 0, akkor minden más vektornormája is 0.

j) Nemnegatív mátrix spektrálsugarához mint sajátértékhez tartozik nemnegatív sajátvektor.

k) Minden irreducibilis mátrix primitív.

l) Nincs olyan 2×2-es duplán sztochasztikus mátrix, amelynek a determinánsa 0.

m) Ha egy 3-szor 3-as mátrixnak pontosan két különböző sajátértéke van, akkor a Jordan-féle normálalakja pontosan két Jordan-blokkból áll.

n) Minden pozitív nilpotens mátrix reducibilis.

o) Ha $\mathbf{A}$ irreducibilis és sztochasztikus, és egységnyi sajátértékei a harmadik komplex egységgyökök $(1, -1/2 + \mathrm{i}\sqrt{3}/2, -1/2 - \mathrm{i}\sqrt{3}/2)$, akkor $\mathbf{A}$ imprimitív, és létezik a $\lim_{n\to\infty} \mathbf{A}^n$ határérték.

Megoldás. *a)* I. Az invertálható mátrixoknak 0 nem sajátértéke, a sgn függvény pedig minden más helyen akárhányszor diffható. *b)* I. *c)* I. Ui. a λ-hoz tartozó általánosított sajátvekotorok egy $\mathcal{V}$ alteret alkotnak, melyet $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ önmagába visz, mivel Jordan-bázisának vektorait e bázis elemeibe vagy a $\mathbf{0}$-ba viszi. Ha $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$, akkor $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{y} \in \mathcal{V}$, és így $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y} + \lambda\mathbf{x} \in \mathcal{V}$. Tehát $\mathcal{V}$ invariáns altere $\mathbf{A}$-nak is. *d)* H. Minden diagonalizálható mátrix Jordan-féle normálalkja diagonális. *e)* I. *f)* I. (Pl. mert spektrálsugara a minimális és maximális oszlopösszegek közé esik). *g)* I, hisz valós mátrix komplex gyökei egymás konjugáltjai, így nem eshetnek különböző Gersgorin-körbe. *h)* H, pl. a $\left[\begin{smallmatrix}1&2\\2&1\end{smallmatrix}\right]$ mátrix pozitív, de indefinit, hisz determinánsa negatív. *i)* I. *j)* I, (Perron–Frobenius-tétel – gyenge változat). *k)* H. *l)* H, pl. $\left[\begin{smallmatrix}1/2&1/2\\1/2&1/2\end{smallmatrix}\right]$ determinánsa 0, de duplán sztochasztikus. *m)* H, ha diagonalizálható, akkor 3 Jordan-blokkból áll. *n)* I. Ugyan pozitív mátrix nem lehet reducibilis, de pozitív mátrix nilpotens sem lehet, hisz pozitív mátrix semelyik hatványa nem lesz $\mathbf{O}$-mátrix. Így mindegyikük reducibilis, hisz senki nem tud mutatni olyan pozitív nilpotens mátrixot, mely ne lenne reducibilis. *o)* Hamis. Az ugyan igaz, hogy $\mathbf{A}$ imprimitív, mert ha primitív lenne, csak az 1 lenne a spektrálkörön, de imprimitív mátrixra a $\lim_\infty \mathbf{A}^n$ határérték nem létezik, csak a hatványok átlagainak határértéke.

13. Oldjuk meg az

$$\mathbf{A}_1\mathbf{X}\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{X}\mathbf{B}_2 = \mathbf{C}, \text{ és az}$$
$$\mathbf{A}_1\mathbf{X}\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{X}\widehat{\mathbf{B}}_2 = \mathbf{D}$$

mátrixegyenleteket, ahol

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix},\ \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\ \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix}1&2\\1&0\end{bmatrix},$$
$$\widehat{\mathbf{B}}_2 = \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix}2&3\\6&9\end{bmatrix},\ \mathbf{D} = \begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}.$$

Megoldás. Megoldandó a

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \mathbf{B}_i^\mathsf{T} \otimes \mathbf{A}_i\right)\mathbf{x} = \operatorname{vec}(\mathbf{C})$$

egyenlet.

$$\mathbf{B}_1^\mathsf{T} \otimes \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_2^\mathsf{T} \otimes \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix}0&2&0&1\\2&1&1&1\\0&3&0&1\\3&2&1&0\end{bmatrix}$$

Így az egyenletrendszer bővített mátrixa és redukált lépcsős alakja:

$$\operatorname{rref}\begin{bmatrix}0&2&0&1&2\\2&1&1&1&6\\0&3&0&1&3\\3&2&1&0&9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0&0&2\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

ahonnan a megoldás az utolsó oszlopból leolvasható, ugyanis $\mathbf{x} = \operatorname{vec}(\mathbf{X})$:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix}2&1\\1&0\end{bmatrix}.$$

A másik egyenletrendszer esetén

$$\mathbf{B}_1^\mathsf{T} \otimes \mathbf{A}_1 + \widehat{\mathbf{B}}_2^\mathsf{T} \otimes \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}$$

Így az egyenletrendszer bővített mátrixa és redukált lépcsős alakja:

$$\operatorname{rref}\begin{bmatrix}0&1&0&1&1\\1&0&1&1&1\\0&1&0&1&1\\1&0&1&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&1&0&1\\0&1&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

ahonnan a megoldás $(x, y, z, w) = (1, 1, 0, 0) + t(-1, 0, 1, 0)$, így az összes megoldás

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}-1&1\\0&0\end{bmatrix}.$$

14. Megoldható-e minden $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrix esetén az

$$\mathbf{AX} + \mathbf{XB} = \mathbf{C}$$

Sylvester-egyenlet, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}?$$

Megoldás. Nem, mert $\mathbf{A}$ egyik sajátpárja $(3, (1, 1, 1))$, míg $\mathbf{B}$ egyik sajátpárja $(-3, (0, 1, -1))$, azaz $\mathbf{A}$-nak és $-\mathbf{B}$-nek a 3 közös sajátértéke. Így az $\mathbf{I} \otimes \mathbf{A} + \mathbf{B}^\mathsf{T} \otimes \mathbf{I}$ mátrix nem invertálható, tehát az $(\mathbf{I} \otimes \mathbf{A} + \mathbf{B}^\mathsf{T} \otimes \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathrm{vec}(\mathbf{C})$ egyenlet nem oldható meg minden $\mathbf{C}$-re.

Feladatok az online tananyagból

8.3, 8.4 alfejezetek

Jordan-bázis egy láncból

Jordan-bázis két láncból

Jordan-féle normálalak

Jordan-féle normálalak egy sajátértékkel

Jordan-féle normálalak több sajátértékkel

Jordan-féle normálalak

Diagonalizálható mátrix függvénye

Jordan-blokk függvénye

Mátrixszor változó exponenciális függvénye

Mátrixhatvány Hermite-polinommal

Exponenciális függvény Hermite-polinommal

Mátrix trigonometrikus függvénye