1. Legyen $n > 1$ és az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mártix főátlójában minden elem a, a többi eleme pedig $b \neq 0$. Mutassuk meg, hogy $a + (n-1)b$ egyszeres, $a - b$ pedig $(n-1)$-szeres sajátérték. Diagonizálható-e $\mathbf{A}$? Ha igen, írjuk fel diagonalizálását!

Megoldás. Az $(\mathbf{A} - (a-b)\mathbf{I})_{n\times n}$ mátrix minden eleme $b \neq 0$, így rangja 1, a homogén egyenletrendszernek $(n-1)$ lineárisan független megoldása van, így ehhez a sajátértékhez $(n-1)$ lineárisan független sajátvektor tartozik, azaz $a - b$ legalább $(n-1)$-szeres gyöke a karakterisztikus polinomnak.

Az $\mathbf{A} - (a + (n-1)b)\mathbf{I}$ mátrix olyan, hogy sorainak összege a nullvektor, tehát rangja kisebb, mint n, így van a homogén egyenletrenszernek nemtriviális megoldása, de nem lehet több, mint 1, mert $a-b$ különbözik $(a+(n-1)b)$-től, így ez a sajátvektor lineárisan független az eddigiektől, és több mint n darab lineárisan független vektor nem lehet. Az $(a + (n-1)b)$ érték is gyöke a karakterisztikus egyenletnek, ami n-edfokú, így más gyöke nincs.

$\mathbf{A}$-nak van n db lineárisan független sajátvektora, tehát diagonizálható: $\mathbf{A} = \mathbf{XDX}^{-1}$, ahol

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & \frac{1}{n} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \operatorname{diag}(a-b, a-b, \dots, a-b, a+(n-1)b)$$

2. A legfeljebb harmadfokú valós polinomok $\mathbb{F}_3[x]$ vektortere 4-dimenziós. Tekintsük a következő lineáris ($T : \mathbb{F}_3[x] \to \mathbb{F}_3[x]$) transzformációt: $T(p(x)) = (x+2)p''(x)$. Van olyan bázis, amelyben ennek a transzformációnak a mátrixa diagonális? Miért?

Megoldás. Tudjuk, hogy a diagonalizálhatóság a lineárisan független sajátvektorok számától függ.

Első megoldás. Tekintünk egy bázist, és abban felírjuk a trafó mátrixát. $e_1 = x^0 \equiv 1$, $e_2 = x^1$, $e_3 = x^2$, $e_4 = x^3$. $Te_1 = Te_2 = 0$, $Te_3 = (x+2)2 = 2x+4$, $Te_4 = (x+2)(6x) = 6x^2 + 12x$. A mátrix tehát

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A karakterisztikus polinom $\chi(\lambda) = \lambda^4$, minden gyöke 0. Nem lehet hasonló egy diagonálishoz csupa nullával a diagonálisában, mert az csak a nullmátrix lehet. Nem diagonalizálható. (További megfigyelés, hogy mivel egy mátrix kielégíti a karakterisztikus polinomját, ez a mátrix nilpotens.) Vagy: Az egyetlen 0 sajátértékhez tartozó egyenletrendszernek $(T - 0\cdot I)\mathbf{x} = T\mathbf{x} = \mathbf{0}$ nincs 4 lineárisan független megoldása, mert $\mathrm{r}(T) = 2$.

Másik megoldás. Olyan $ax^3 + bx^2 + cx + d$ polinomot keresünk, amelyre $(x+2)(6ax+2b) \equiv \lambda(ax^3 + bx^2 + cx + d)$. Ha meg akarjuk oldani, kiderül, csak akkor van nem azonosan nulla megoldás, ha $\lambda = 0$. Az, hogy ez a trafó nilpotens, onnan is látszik, hogy konstans elem képe a nulla polinom, legalább elsőfokúé pedig alacsonyabb fokú. Így többszöri alkalmazás után már csak az azonosan nullát kaphatjuk.

3. Az $\mathbf{A}$ mátrix egyik sajátértéke $\lambda = 2$. Meg tudjuk-e határozni a másik két sajátértéket, ha $\mathbf{A}$ egyik elemét nem látjuk tisztán?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & ? \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Megoldás. $\operatorname{trace}\mathbf{A} = 5 = \sum \lambda_i$, másrészt $\det(\mathbf{A}) = \prod_i \lambda_i = 0$, mert a harmadik sor az első konstansszorosa, így a három sajátérték 2, 0, 3.

4. Döntsük el, hogy invertálható-e az alábbi mátrix, ha annyit tudunk, hogy az ismeretlen értékek a $[-1, 1]$ intervallumból való random számok!

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & \xi & -1 \\ -2 & 6 & 4 & \eta \\ 1 & 0 & 9 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Megoldás. Jelölje az a-közepű r-sugarú Gersgorin köröket $\mathcal{K}_r^{\mathrm{sor}}(a)$, ill. $\mathcal{K}_r^{\mathrm{osz}}(a)$. A sor szerintiek $\mathcal{K}_4^{\mathrm{sor}}(5)$, $\mathcal{K}_7^{\mathrm{sor}}(6)$, $\mathcal{K}_2^{\mathrm{sor}}(9)$, $\mathcal{K}_7^{\mathrm{sor}}(4)$, az oszlop szerintiek $\mathcal{K}_4^{\mathrm{osz}}(5)$, $\mathcal{K}_5^{\mathrm{osz}}(6)$, $\mathcal{K}_8^{\mathrm{osz}}(9)$, $\mathcal{K}_3^{\mathrm{osz}}(4)$. Az utóbbiak egyesítésében nincs benne az origó, tehát a 0 nem lehet sajátérték, így a mátrix invertálható.

5. Írjuk fel az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátfelbontását és spektrálfelbontását! A spektrálfelbontást felhasználva határozzuk meg az $\mathbf{A}^{100}$ mátrixot!

Megoldás. Saját és spektrálfelbontás: A sajátértékek és sajátvektorok meghatározása az előadáson a BSc-n tanult és az előadáson átismételt módszerrel az $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{0}$ egyenletrendszerből meghatározható: $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4$, a sajátértékek $\lambda_{1,2} = 2$, $\lambda_3 = 1$. A sajátalterek $\operatorname{span}((1,1,0), (-1,0,1))$, illetve $\operatorname{span}((1,0,-2))$. Így a sajátfelbontás a sajátvektorokból képzett $\mathbf{X}$ mátrixszal $\mathbf{A} = \mathbf{X\Lambda X}^{-1}$, ahol

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \operatorname{diag}(2,2,1), \mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Ebből a $\mathbf{P}_1$ és $\mathbf{P}_2$ spektrálvetítők és velük felírva az $\mathbf{A} = 2\mathbf{P}_1 + 1\mathbf{P}_2$ spektrálfelbontás:

$$\mathbf{A} = 2\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= 2\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

(Matlab/Octave kód a spektrálvetítőkre (a sajátalteret kifeszítő vektorok nem lesznek azonosak, és itt a 2-höz tartozó sajátalteret az első és harmadik sajátvektor feszíti ki):

```
    >> [X L]=eig(A)
X =

   0.70711  -0.44721   0.40825
   0.00000   0.00000   0.81650
  -0.70711   0.89443   0.40825

L =

Diagonal Matrix

   2   0   0
   0   1   0
   0   0   2

>> X1 = X^-1
X1 =

   2.82843  -2.12132   1.41421
   2.23607  -2.23607   2.23607
   0.00000   1.22474   0.00000

>> P1 = X(:,[1 3])*X1([1 3],:)
P1 =

   2.00000  -1.00000   1.00000
   0.00000   1.00000   0.00000
  -2.00000   2.00000  -1.00000

>> P2 = X(:,2)*X1(2,:)
P2 =

  -1.00000   1.00000  -1.00000
   0.00000   0.00000   0.00000
   2.00000  -2.00000   2.00000
```

2. megoldás a spektrálfelbontásra a sajátfelbontás nélkül. Mivel

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2&=\mathbf{I}\\ 2\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2&=\mathbf{A}\end{aligned}$$

ezért $\mathbf{P}_1 = \mathbf{A}-\mathbf{I}$ és $\mathbf{P}_2 = 2\mathbf{I}-\mathbf{A}$.

A 100-adik hatvány: Mivel általában $\mathbf{A}^n = \sum_i \lambda_i^n \mathbf{P}_i$, ezért

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{100} &= 2^{100}\mathbf{P}_1 + 1^{100}\mathbf{P}_2\\ &= 2^{100}\begin{bmatrix}2&-1&1\\0&1&0\\-2&2&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&1&-1\\0&0&0\\2&-2&2\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}2^{101}-1&-2^{100}+1&2^{100}-1\\0&2^{100}&0\\-2^{101}+2&2^{101}-2&-2^{100}+2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

6. Határozzuk meg a csupa 1-esből álló $\mathbf{J}_{n\times n}$ mátrix spektrálfelbontását, és hogy mely altér mentén mely altérre vetítenek a spektrálvetítők!

Megoldás. $\mathbf{J}$ rangja 1, és a csupa egyesből álló $\mathbf{1}$ vektor sajátvektor, mely az n sajátértékhez tartozik. Az $n-1$ darab egymástól független $(0,\dots,0,1,0,\dots,0,-1)$ alakú vektorok mind a 0-hoz tartozó sajátvektorok, így a 0 sajátérték geometriai multiplicitása $n-1$, tehát megvan az n sajátérték.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_1+\ \ \mathbf{P}_2&=\mathbf{I}\\ n\mathbf{P}_1+0\mathbf{P}_2&=\mathbf{J}\end{aligned}\ \rightsquigarrow\ \begin{aligned}\mathbf{P}_1&=\tfrac{1}{n}\mathbf{J}\\ \mathbf{P}_2&=\mathbf{I}-\tfrac{1}{n}\mathbf{J}\end{aligned}$$

$\mathbf{P}_1$ az $\mathcal{N}(\mathbf{J}-n\mathbf{I})$ altérre vetít $\mathcal{O}(\mathbf{J}-n\mathbf{I})$ mentén. Mivel

$$\operatorname{rref}(\mathbf{J}-n\mathbf{I}) = \operatorname{rref}\begin{bmatrix}1-n&1&\dots&1\\1&1-n&\dots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\dots&1-n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{I}\mid-\mathbf{1}\end{bmatrix}_{n-1,n}$$

ezért $\mathcal{N}(\mathbf{J}-n\mathbf{I}) = \operatorname{span}(\mathbf{1})$, és mivel $\mathbf{J}$ szimmetrikus, ezért $\mathcal{S}(\mathbf{J}-n\mathbf{I}) = \mathcal{O}(\mathbf{J}-n\mathbf{I})$, így $\mathcal{O}(\mathbf{J}-n\mathbf{I}) = \operatorname{span}(\mathbf{1})^\perp$, ami az $\mathbf{1}$ normálvektorú hipersík. $\mathbf{P}_2$ esetén ugyanez a két tér szerepel, csak fordított szereposztásban.

7. A következő mátrixok közül melyik normális, melyik önadjungált, és az önadjungáltak közül melyik indefinit?

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&2&-1\\-2&0&1\\1&-1&0\end{bmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$
$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&3&0\\1&0&1\end{bmatrix},\qquad \mathbf{D}=\begin{bmatrix}0&1+\mathrm{i}&2\\1-\mathrm{i}&-1&1\\2&1&1\end{bmatrix}$$

Megoldás. $\mathbf{A}$ ferdén szimmetrikus, tehát normális ($\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = -\mathbf{A}^2$).

$\mathbf{B}\mathbf{B}^\mathsf{T} \ne \mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B}$, $\mathbf{B}$ nem normális.

$\mathbf{C}$ valós szimmetrikus, így normális, egyúttal önadjungált is. $\mathbf{C}$ jellege többféleképp meghatározható:
1. szimultán sor és oszlopműveletekkel diagonalizálva:

$$\begin{bmatrix}1&2&1\\2&3&0\\1&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&-2\\0&-2&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&4\end{bmatrix}$$

A $\mathbf{C}$ szignatúrája $(2,1,0)$, tehát $\mathbf{C}$ indefinit. Csak a teljesség kedvéért a fenti átalakítás szimultán sor- és oszlopműveleteit megvalósító mátrixszorzásokat is kiírva:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1\\2&3&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&-2\\0&-2&0\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&-2\\0&-2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&4\end{bmatrix}$$

2. Vezető főminorokkal (másik nevén bal felső aldeterminánsokkal): $\mathbf{C}$ aldeterminánsai rendre $1, -1, -4$. Ez nem pozitív definit, mert akkor $+++$ lenne, és nem negatív definit, mert akkor $-+-$ lenne, a determináns nem 0, tehát szemidefinit sem lehet: $\mathbf{C}$ indefinit.
3. Sajátértékekkel: Programmal kiszámolva a sajátértékeket: -0.68133, 1.35793, 4.32340. Ezek közt van pozitív és negatív is, így indefinit.

$\mathbf{D}$ önadjungált, így normális. Jellege többféleképp meghatározható:
1. Főminorokkal: $\mathbf{D}$-nek már az 1×1-es főminorai közt is, vagyis a főátlóban is van pozitív és negatív eleme, ezért indefinit. Csak a teljesség kedvéért konkrét vektorral is igazolva:

$$\begin{bmatrix}0&1&0\end{bmatrix}\mathbf{D}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}<0,\qquad\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}\mathbf{D}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}>0.$$

2. Sajátértékekkel: Programmal kiszámolva a sajátértékeket: -2.32887, -0.81856, 3.14743, ezek valóban mind valósak, és van köztük negatív és pozitív is.

8. Unitéren diagonalizálhatóak-e az alábbi mátrixok?

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&2\\-2&0\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1+\mathrm{i}&2-\mathrm{i}&\mathrm{i}\\\mathrm{i}&1+\mathrm{i}&2-\mathrm{i}\\2-\mathrm{i}&\mathrm{i}&1+\mathrm{i}\end{bmatrix}$$

Ha igen, akkor az $\mathbf{A}$ esetén írjuk is fel a diagonalizációt, azaz a sajátfelbontást!

Megoldás. Az $\mathbf{A}$ ferdén szimmetrikus, tehát normális, így unitéren diagonalizálható. A karakterisztikus polinom $\chi(\lambda) = \lambda^2 + 4$, így a sajátértékek $\pm 2\mathrm{i}$, a sajátvektorokból álló ortonormált rendszerből felírt unitér mátrixot $\mathbf{U}$-val jelölve a sajátfelbontás $\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{-1}$, ahol

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 2\mathrm{i} & 0 \\ 0 & -2\mathrm{i} \end{bmatrix}, \ \mathbf{U}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ -\mathrm{i} & 1 \end{bmatrix}.$$

A $\mathbf{B}$ esetén

$$\mathbf{B}^\mathsf{H}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{B}^\mathsf{H} = \begin{bmatrix} 8 & 1-2i & 1+2i \\ 1+2i & 8 & 1-2i \\ 1-2i & 1+2i & 8 \end{bmatrix}$$

tehát normális, így unitéren diagonalizálható.

9. Definiálhat-e skalárszorzást a következő kvadratikus alak: $3x^2 + 6xy - 2xz + 2yz + 5y^2 + 4z^2$.

Megoldás. Mátrixa

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Ez csak akkor definiálhat egy $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{B}\mathbf{y}$ skalárszorzást, ha a kvadratikus alak (azaz $\mathbf{B}$, a mátrixa) pozitív definit.
1. Szimultán sor-oszlop műveletekkel:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & \frac{11}{3} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{B}$ szignatúrája $(3, 0, 0)$, tehát pozitív definit.
2. Sajátértékekkel: Programmal kiszámolva a sajátértékeket: 0.30873, 4.51113, 7.18014, tehát pozitív definit!
3. Vezető főminorokkal: Ezek értéke 3, 6, 10, tehát pozitív definit.

10. Vannak-e kongruensek az alábbi mátrixok között?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás. A kérdés, hogy van-e olyan invertálható $\mathbf{M}$ mátrix, melyre $\mathbf{A} = \mathbf{M}\mathbf{B}\mathbf{M}^\mathsf{T}$, ahol $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ a fenti mátrixok közül valamelyik kettő? A válaszhoz elég meghatározni a három mátrix szignatúráját. A korábban bemutatott módszerek bármelyikével azt kapjuk, hogy mindhárom mátrix szignatúrája $(2, 1, 1)$, így mind kongruensek egymással. (Az első sajátértékei kézzel is számolhatók: 0, 1, $(3 \pm \sqrt{17})/2$, a többinél a szimultán sor-/oszlopműveletek segítenek, vagy a számítógép).

11. Írjuk fel a valós

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

szinguláris felbontását az elméleti részben ismertetett lépésekkel, majd számítsuk ki pszeudoinverzét!

Megoldás. $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$. Ennek karakterisztikus polinomja $p(\lambda) = \lambda^2 - 20\lambda + 75$, ennek gyökei 15 és 5. A $(\mathbf{B} - 15\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenlet normált megoldása $\mathbf{u}_1 = (\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}})$. A $(\mathbf{B} - 5\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenlet normált megoldása $\mathbf{u}_2 = (-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}})$. A $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{15}}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u}_1$ és a $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u}_2$ képletekbe való behelyettesítéssel:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{bmatrix} \sqrt{10} \\ \frac{5}{\sqrt{10}} \\ \frac{5}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{5}{\sqrt{10}} \\ \frac{5}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{15} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{15}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

12. Előállítható-e az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x} = \left[\begin{smallmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{smallmatrix}\right]\mathbf{x}$ mátrixleképezés egy forgatás és egy ortonormált bázis vektorai mentén való nyújtások kompozíciójaként? Ha igen, melyek ezek a leképezések?

Megoldás. A feladat az $\mathbf{A}$ polárfelbontását kéri geometriai nyelven.
A polárfelbontás fejben: Keressük az $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{Q}$ felbontást, ahol $\mathbf{P}$ pozitív szemidefinit, $\mathbf{Q}$ ortogonális. Az $\mathbf{A}$ mátrix szimmetrikus lenne, ha az első oszlopát -1-gyel szoroznánk, de az így kapott mátrix determinánsa negatív, így a mátrix nem pozitív definit, de azzá válik, ha két oszlopát kicseréljük. Mindez egyetlen mátrixszorzással megvalósítható:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

ami valóban egy pozitív definit (mivel vezető főminorai 2, 3 pozitívak), és egy ortogonális mátrix szorzata. Utóbbi (azaz az $\mathbf{i} \mapsto -\mathbf{j}$, $\mathbf{j} \mapsto \mathbf{i}$) egy $-\pi/2$-vel, azaz $-90°$ fokkal való forgatás mátrixa. A $\mathbf{P} = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ karakterisztikus polinomja

$$\chi_\mathbf{P}(\lambda) = \det(\mathbf{P} - \lambda\mathbf{I}) = (2-\lambda)^2 - 1$$
$$= \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1).$$

A $\lambda = 3$-hoz tartozó sajátaltér $\operatorname{span}(1, 1)$, a $\lambda = 1$-hez tartozó $\operatorname{span}(1, -1)$.
2. Polárfelbontás az SVD-ből:

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \lambda_1 = 9, \lambda_2 = 1 \rightsquigarrow \sigma_1 = 3, \ \sigma_2 = 1$$

$$\mathbf{V} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{Q} = \mathbf{U}\mathbf{V}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Feladatok az online tananyagból

8.1, 8.2 alfejezetek

Mátrixhatvány sajátértékei, sajátalterei
Komplex sajátértékek és sajátvektorok
4×4-es mátrix sajátértékei, sajátalterei
Mátrix diagonalizálhatósága
Mátrix diagonalizálhatósága 2
2×2-es mátrix sajátfelbontása
3×3-as mátrix sajátfelbontása
Mátrixpolinom sajátfelbontásból
4×4-es mátrix diagonalizálhatósága
4×4-es mátrix diagonalizálhatósága 2
Diagonalizálhatóság eldöntése
2×2-**es mátrix sajátfelbontásának diadikus alakja**
Lineáris transzformáció sajátértéke, sajátaltere

9. fejezet

Ortogonális diagonalizáció
Ortogonális diagonalizálás különböző bázisokban
Mátrixszorzat alakba írás
Kvadratikus alak báziscsere után
Főtengelytétel alkalmazása
Főtengelytétel alkalmazása (3×3)
Kvadratikus alak diagonalizálása elemi sorműveletekkel
Definitség a sajátértékekből
Definitség a főminorokból
Szinguláris érték szerinti felbontás (2×2)
Szimmetrikus mátrix szinguláris felbontása
Redukált és teljes SVD (3×2**)**
SVD $(2{\times}3)$
Schur-felbontás ($2{\times}2$**)**
Schur-felbontás $(3{\times}3)$
Mátrix unitér diagonalizálhatósága
Definitség szimultán sor- és oszlopműveletekkel
Cholesky-faktorizáció
SVD és polárfelbontás
SVD és pszeudoinverz
Mátrix faktorizációja
Az SVD geometriája