1. A Gram-mátrix és vetítőmátrix segítségével is számoljuk ki a $\mathbf{v} = (3,1,3,5)$ vektornak a $\mathbf{a}_1 = (1,1,0,0)$, $\mathbf{a}_2 = (0,0,1,1)$, $\mathbf{a}_3 = (1,0,1,0)$ vektorok által kifeszített altérre eső merőleges vetületét!

Megoldás. (1) Gram-mátrixszal:
Legyen $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_1]$. Ekkor a Gram-mátrix

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_3\cdot\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_3\cdot\mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3\cdot\mathbf{a}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

az $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{v}$ szorzatok vektora

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{v} \\ \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{v} \\ \mathbf{a}_3\cdot\mathbf{v} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix},$$

végül a $\mathbf{Gc} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldása $\mathbf{c} = (2,4,0)$, amiből a keresett vetület

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{Ac} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

(2) vetítőmátrixszal: A vetítőmátrixot megadó képlet $\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}$, ebbe helyettesítve a fenti $\mathbf{A}$ mátrixot:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Pv} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

2. Számítsuk ki a következő mátrixok pszeudoinverzét:

$$a)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\ b)\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\ c)\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$d)\ \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad e)\ \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -5 \\ -4 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

Megoldás. *a)* $\mathbf{A}$ teljes sorrangú.

$$\mathbf{AA}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 26 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\mathbf{AA}^\mathsf{T})^{-1} = \frac{1}{51}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 26 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{AA}^\mathsf{T})^{-1} = \frac{1}{51}\begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 1 & -25 \\ 1 & 26 \end{bmatrix}$$

b) $\mathbf{B}$ teljes oszloprangú.

$$\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 10 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix},\ (\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1} = \frac{1}{41}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^+ = (\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T} = \frac{1}{41}\begin{bmatrix} 5 & 12 & 6 \\ 3 & -1 & 20 \end{bmatrix}$$

c) $\mathbf{C}$ teljes oszloprangú, tehát eljárhatunk úgy, mint a *b)* pontban. De észrevehetjük, hogy $\mathbf{C}$ blokkdiagonális, amelynek pszeudoinverze szintén blokkdiagonális a blokkok pszeudoinverzével:

$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right],\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix},\ \mathbf{C}^+ = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

d) A bázisfelbontás a redukált lépcsős alak alapján

$$\mathbf{D} = \mathbf{FG} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

A teljes oszloprangú $\mathbf{F}$ és teljes sorrangú $\mathbf{G}$ inverzét a korábbi módon számolva

$$\mathbf{F}^+ = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -4 & -5 \end{bmatrix},\ \mathbf{G}^+ = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}^+ = \mathbf{G}^+\mathbf{F}^+ = \frac{1}{3\cdot 14}\begin{bmatrix} 4 & 14 & 10 \\ -1 & -14 & -13 \\ -5 & 14 & 19 \end{bmatrix}$$

e) Az $\mathbf{E}$ mátrix bázisfelbontása

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

A törtekkel való számolás minimalizálása érdekében legyen

$$\mathbf{E} = \mathbf{BC} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -5 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B} = 5$, $(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1} = \frac{1}{5}$, $\mathbf{CC}^\mathsf{T} = 30$, $(\mathbf{CC}^\mathsf{T})^{-1} = \frac{1}{30}$, így

$$\mathbf{B}^+ = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix},\ \mathbf{C}^+ = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}^+ = \frac{1}{5\cdot 30}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5\cdot 30}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}$$

3. Adjunk ortonormált bázist az $\mathbf{a}_1 = (1,1,1,1)$, $\mathbf{a}_2 = (-1,4,4,-1)$, $\mathbf{a}_3 = (4,-2,2,0)$ vektorok által kifeszített altérben.

Megoldás. Legyen $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 = (1,1,1,1)$.

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{b}_1(\mathbf{b}_1^\mathsf{T}\mathbf{a}_2)}{\mathbf{b}_1^\mathsf{T}\mathbf{b}_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{6}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{5}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Mivel csak $\mathbf{b}_2$ iránya számít, az egyszerűség kedvéért folytathatjuk a számolást a $\mathbf{b}_2 = (-1,1,1,-1)$ vektorral.

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - \frac{\mathbf{b}_1(\mathbf{b}_1^\mathsf{T}\mathbf{a}_3)}{\mathbf{b}_1^\mathsf{T}\mathbf{b}_1} - \frac{\mathbf{b}_2(\mathbf{b}_2^\mathsf{T}\mathbf{a}_3)}{\mathbf{b}_2^\mathsf{T}\mathbf{b}_2}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{4}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{4}{4}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

A három vektort normálva kapjuk az ortonormált bázist: $\left\{\frac{1}{2}(1,1,1,1), \frac{1}{2}(-1,1,1,-1), \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)\right\}$.

4. Adjunk ortonormált bázist az $\mathbf{a}_1 = (\mathrm{i},\mathrm{i},1,1)$, $\mathbf{a}_2 = (0,2\mathrm{i},1+\mathrm{i},1-\mathrm{i})$, $\mathbf{a}_3 = (1,-1+2\mathrm{i},2+\mathrm{i},-\mathrm{i})$ vektorok által kifeszített altérben.

Megoldás. Legyen $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 = (\mathrm{i},\mathrm{i},1,1)$.

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{b}_1(\mathbf{b}_1^\mathsf{H}\mathbf{a}_2)}{\mathbf{b}_1^\mathsf{H}\mathbf{b}_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

Hasonlóan folytatva

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - \frac{\mathbf{b}_1(\mathbf{b}_1^{\mathsf{H}}\mathbf{a}_3)}{\mathbf{b}_1^{\mathsf{H}}\mathbf{b}_1} - \frac{\mathbf{b}_2(\mathbf{b}_2^{\mathsf{H}}\mathbf{a}_3)}{\mathbf{b}_2^{\mathsf{H}}\mathbf{b}_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1+2\mathrm{i} \\ 2+\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

A három vektort normálva kapjuk az ortonormált bázist: $\left\{\frac{1}{2}(\mathrm{i},\mathrm{i},1,1), \frac{1}{2}(-\mathrm{i},\mathrm{i},\mathrm{i},-\mathrm{i}), \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)\right\}$.

5. Ortogonalizáljuk az $\{1, x, x^2\}$ polinomrendszert a

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 pq$$

skalárszorzatra nézve. (ld. még az online „Legjobb közelítés a polinomok terében" feladatot)

Megoldás. A legföljebb másodfokú polinomok $\mathcal{P}_2$ terében az $a_1 = 1$, $a_2 = x$, $a_3 = x^2$ polinomok bázist alkot. Legyen $b_1 = 1$.

$$b_2 = a_2 - \frac{\langle b_1, a_2\rangle}{\|b_1\|^2} b_1 = x - \frac{\int_0^1 1\cdot x\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 1^2\,\mathrm{d}x} 1 = x - \frac{1}{2}.$$

Hasonlóan

$$\begin{aligned} b_3 &= a_3 - \frac{\langle b_1, a_3\rangle}{\|b_1\|^2} b_1 - \frac{\langle b_2, a_3\rangle}{\|b_2\|^2} b_2 \\ &= x^2 - \frac{\int_0^1 1\cdot x^2\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 1^2\,\mathrm{d}x} 1 - \frac{\int_0^1 (x-\frac{1}{2})\cdot x^2\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^2\,\mathrm{d}x}\left(x - \frac{1}{2}\right) \\ &= x^2 - x + \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Tehát e skalárszorzatra nézve az 1, $x-\frac{1}{2}$, $x^2 - x + \frac{1}{6}$ függvények a $\mathcal{P}_2$ tér ortogonális bázisát alkotják.

6. Adjuk meg a következő mátrixok QR-felbontását:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás. Az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopaiból már elkészítettünk a 3. feladatban egy ortogonális rendszert, így annak jelöléseivel

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^{\mathsf{T}} \\ \mathbf{b}_2^{\mathsf{T}} \\ \mathbf{b}_3^{\mathsf{T}} \end{bmatrix} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

azaz

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

A $\mathbf{B}$ mátrix teljes oszloprangú, a kétdimenziós első oszlophoz a középiskolában tanult módon választunk merőlegest, majd normáljuk. (Ha a $(-1,3)$-at választjuk, akkor $\mathbf{R}$ átlójában negatív elem is lesz, így $(1,-3)$ a kívánt választás.)

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{10}{\sqrt{10}} & \frac{6}{\sqrt{10}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

A $\mathbf{C}$ mátrix oszlopaiból (Gram-Schmidt ortogonalizáció alkalmazásával) az $(1,1,0)$, $(1,-1,2)$, $(-1,1,1)$ irányokat kapjuk, amelyeket normálni kell. (Mivel háromdimenziósak, a harmadik az első kettő vektori szorzásával is megkapható, esetleg (-1)-gyel szorozva, ha az $\mathbf{R}$ főátlójába negatív elem kerülne.)

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

7. Adjuk meg az alábbi egyenletrendszerek legkisebb abszolútértékű optimális megoldását a normálegyenlet segítségével, majd (az előző feladatokban meghatározott) pszeudoinverz vagy QR-felbontás segítségével. Melyik egyenletrendszernek van egyetlen és melyiknek végtelen sok optimális megoldása?

$$\begin{aligned} 2x - y - 5z &= 0 \\ -4x + 2y + 10z &= 15 \end{aligned}, \qquad \begin{aligned} x - y + 4z &= 2 \\ x + 4y - 2z &= 6 \\ x + 4y + 2z &= 4 \\ x - y &= 2 \end{aligned}.$$

Megoldás. Mindkét egyenletrendszer ellentmondásos, a második együtthatómátrixa teljes oszloprangú, így egyetlen optimális megoldása van (ami szükségképpen a sortérbe esik).

Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenlethez tartozó $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{b}$ normálegyenlet az első egyenletrendszer esetén

$$\begin{bmatrix} 20 & -10 & -50 \\ -10 & 5 & 25 \\ -50 & 25 & 125 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -60 \\ 30 \\ 150 \end{bmatrix}$$

A bővített mátrix redukált lépcsős alakja

$$\operatorname{rref}\begin{bmatrix} 20 & -10 & -50 & -60 \\ -10 & 5 & 25 & 30 \\ -50 & 25 & 125 & 150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -5/2 & -3 \end{bmatrix}$$

Innen az összes megoldás

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 5/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

A sortérbe eső megoldáshoz vezető egyenletrendszer bővített mátrixa és annak redukált lépcsős alakja

$$\operatorname{rref}\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -5/2 & -3 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 5/2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2/5 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Az 1.*e)* feladat $\mathbf{E}$ mátrixának pszeudoinverzével:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{5\cdot 30}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 15 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

A második egyenletrendszerhez tartozó normálegyenlet bővített mátrixa és annak redukált lépcsős alakja

$$\operatorname{rref}\begin{bmatrix} 4 & 6 & 4 & 14 \\ 6 & 34 & -4 & 36 \\ 4 & -4 & 24 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 \end{bmatrix}$$

Tehát az optimális megoldás $(3, 1/2, -1/4)$.

A 3. feladat $\mathbf{A}$ mátrixának QR felbontásával

$$\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\mathbf{b} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Rx} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ez utóbbi egyenletből rendre $z = -1/4$, $y = 1/2$, $x = 3$.

8. Adja meg a következő mátrix QR-felbontását Givens-forgatással, majd Householder-tükrözéssel!

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 15 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás. *Givens-forgatás:* Az első sor első elemével nullázzuk ki a harmadik sor első elemét (a második sor első eleme már eleve nulla). $r^2 = 64 + 225 = 17^2$, $\mathbf{A}_1 = \mathbf{Q}_1\mathbf{A}$, azaz

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \frac{8}{17} & 0 & \frac{15}{17} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{15}{17} & 0 & \frac{8}{17} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 15 & 12 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 12 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

A második sor második elemével nullázzuk ki az harmadik sor második elemét, $r^2 = 9 + 16 = 5^2$, és $\mathbf{A}_2 = \mathbf{Q}_2\mathbf{A}_1$, azaz

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 & 12 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 12 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}_1^\mathsf{T}\mathbf{Q}_2^\mathsf{T}\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \frac{8}{17} & -\frac{9}{17} & -\frac{12}{17} \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{15}{17} & \frac{24}{85} & \frac{32}{85} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 & 12 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Householder-tükrözés: $|(8, 0, 15)| = 17$, így $(8, 0, 15) - (17, 0, 0) = (-9, 0, 15) = \mathbf{a}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1 &= \mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^\mathsf{T} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{81 + 225} \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 & 0 & 15 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{153} \begin{bmatrix} 81 & 0 & -135 \\ 0 & 0 & 0 \\ -135 & 0 & 225 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{153} \begin{bmatrix} 72 & 0 & 135 \\ 0 & 153 & 0 \\ 135 & 0 & -72 \end{bmatrix} = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} 8 & 0 & 15 \\ 0 & 17 & 0 \\ 15 & 0 & -8 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_1 = \mathbf{Q}_1\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 17 & 12 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A jobb alsó 2×2-es blokkot alakítjuk tovább.
$|(4, -3)| = 5$, így $(4, -3) - (5, 0) = (-1 - 3) = \mathbf{b}$

$$\mathbf{Q}_2 = \mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{b}}\mathbf{b}\mathbf{b}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{10} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_2\mathbf{A}_1 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 & 12 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 12 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}_1^\mathsf{T}\mathbf{Q}_2^\mathsf{T}\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \frac{8}{17} & -\frac{9}{17} & -\frac{12}{17} \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{15}{17} & \frac{24}{85} & \frac{32}{85} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 & 12 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Feladatok az online tananyagból

Skaláris szorzás másik bázisban
Vektorok hossza, távolsága, szöge
Ortogonális (merőleges) polinomok
Ortonormált trigonometrikus függvények
Skaláris szorzat kiszámítása normából
Adjungált fölírása
Skaláris szorzás komplex euklideszi térben
Vetítés Gram-mátrisszal
Vetítőmátrix felírása
Legjobb közelítés ortogonális bázis esetén
Optimális megoldások
Három vektor $\mathbb{R}^4$-ben
QR-felbontás (3×3)
QR-felbontás (4×4)
Optimális megoldás QR-felbontásból
Sortérre merőleges oszloptér
Paralelogramma azonosság
Legjobb közelítés a polinomok terében
Vetítő és merőleges vetítő mátrix
Lineáris regresszió
Pszeudoinverz
Egyenletrendszer optimális megoldása pszeudoinverzzel
Ortogonalizáció összefüggő vektorokkal
Pszeudoinverz QR-felbontásból
Bázis, melyben a skaláris szorzás standard lesz
Polinomiális regresszió
Ortogonalizáció komplex vektorokkal
Givens-forgatás, Householder-tükrözés