1. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket, majd írjuk fel az összes megoldást a legkisebb abszolút értékű megoldással is!

$$2x + 3y + 6z = 49 \qquad \begin{aligned} x_1 + \ x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 + \ x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 \qquad &= 5 \end{aligned}$$

Eredmény. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t,$
$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t,$
$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} t,\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} t.$

2. Hány megoldása van az alábbi bővített mátrixú egyenletrendszernek, ha $\mathbb{R}$, ha $\mathbb{F}_2$, illetve ha $\mathbb{F}_3$ fölött oldjuk meg?

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Eredmény. ∞, 4, illteve 3.

3. Az alábbi $\mathbb{F}_3$ fölötti egyenletrendszer a és b milyen értékeire lesz inkonzisztens? És milyen értékek esetén lesz több megoldása? Soroljuk fel ezeket!

$$\begin{aligned} x + y + az &= b \\ 2x + y + \ z &= 0 \\ y + \ z &= 1 \end{aligned}$$

Eredmény. Egyik lépcsős alakja:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a+2 & b+2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+2 & b+1 \end{array}$$

Ha $a = 1$ és $b \neq 2$, akkor inkonzisztens.
Ha $a \neq 1$, akkor egyértelmű a megoldás.
Ha $a = 1$ és $b = 2$, akkor több megoldás is van:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} t,$$

azaz a megoldások: $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1,)$, $(1, 2, 2)$.

4. Az $\mathbb{R}^4$-beli $\mathbf{a} = (1, 1, 1, 0)$, $\mathbf{b} = (1, -1, 1, 1)$, $\mathbf{c} = (1, 2, 4, 0)$ és $\mathbf{d} = (2, 1, -1, 0)$ vektorok mely nem üres részhalmaza alkot lineárisan független vektorrendszert? Írjuk fel a $\mathbf{c}$ vektor koordinátás alakját a $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}\}$ bázisban és a $\mathcal{C} = \{\mathbf{a}, \mathbf{d}\}$ bázisban!

Eredmény. Minden 1 és 2-elemű, valamint a 3-eleműek az $\{\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$-t kivéve. $(\mathbf{c})_{\mathcal{B}} = (3, 0, -1)$, $(\mathbf{c})_{\mathcal{C}} = (3, -1)$, vagy oszlopvektor-jelöléssel

$$[\mathbf{c}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{c}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

5. Elemi sor- és ha szükséges elemi oszlopműveletekkel számítsuk ki annak a szalagmátrixnak a determinánsát, amelynek főátlójában 0-k, alatta és fölötte 1-esek állnak.

Eredmény. $D_1 = 0$, $D_2 = -1$, $D_3 = 0$, $D_4 = 1, \ldots$, általánosan $D_n = \cos(n\frac{\pi}{2})$

6. Határozzuk meg az alábbi mátrixok kitüntetett altereit egy-egy bázisuk megadásával.

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \\ 9 & 3 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Eredmény. Az első mátrixot jelölje $\mathbf{A}$:

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right),$$

$$\mathcal{S}(\mathbf{A}) = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right),$$

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}) = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right),$$

$$\mathcal{O}(\mathbf{A}) = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right).$$

7. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ egy tetszőleges valós mátrix, és tekintsük a sorterének és nullterének egy-egy bázisát. A lineáris algebra alaptételét (mely szerint e két altér merőleges kiegészítő alterek) igazoljuk, hogy e bázisok egyesítése bázisa $\mathbb{R}^n$-nek. Igazoljuk, hogy $\mathbb{R}^n$ minden vektora egyértelműen előáll egy sortérbe és egy nulltérbe eső vektor összegeként!

Eredmény. Online jegyzet: 3.2.2. szakasz "Lineáris algebra alaptétele" című oldalán „A négy kitüntetett altér" című tétel.

8. Elemi sorműveletekkel számítsuk ki az alábbi mátrixok inverzét!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}$$

Eredmény. $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 9 & 6 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & -6 & 4 & -1 \\ -6 & 14 & -11 & 3 \\ 4 & -11 & 10 & -3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

9. Adjuk meg az alábbi mátrixok LU-felbontását:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 5 \\ 6 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Eredmény. $\mathbf{A}$: $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

$\mathbf{B}$: $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{16}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

10. Az előző LU-felbontások segítségével oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket!

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= 6 \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= -4 \\ 2x_2 - 2x_3 &= 2 \end{aligned}, \qquad \begin{aligned} 9x - y + z &= 3 \\ 3x + 5y + 5z &= 5 \\ 6x - 2y &= 2 \end{aligned}$$

Eredmény. $(2, 0, -1)$, $(0, -1, 2)$

11. Adjuk meg az alábbi mátrixok PLU-felbontását úgy, hogy mindig a legnagyobb abszolút értékű elemmel elimináljuk az oszlop többi nemnulla elemét (vagyis pl. $\mathbf{A}$-ban első lépésként az első és harmadik sort cseréljük fel).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 4 & 6 & -2 \\ 8 & 8 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 9 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Eredmény. $\mathbf{A} = \mathbf{PLU}$: $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 8 & 8 & -4 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$

$\mathbf{B} = \mathbf{PLU}$: $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 9 \\ 0 & 5 & \frac{5}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

Feladatok az online tananyagból

2. Gauss-módszer 4
Redukált lépcsős alak
Gauss–Jordan-módszer 2
Szimultán egyenletrendszer
Síkok közös pontja 2
Oszlopmodell 2
Egyenletrendszer véges testek fölött
Hipersík explicit és implicit egyenletrendszere.
3. Mátrix rangja 2
Generált altér R4-ben
Altér 1, Altér 2, Altér 3
Altér bázisa 1
Altér bázisa, koordinátás alak
Nulltér
Mátrix kitüntetett altereinek dimenziója 2.
Altér merőlegese 1
Hipersíkba eső pontok
Mátrix kitüntetett alterei
Egyenletrendszer minimális abszolútértékű megoldása
Lineáris egyenletrendszer véges test felett
4. Mátrix inverze
Egyenletrendszer megoldása
Felbontás szimmetrikus és ferdén szimmetrikus összegére
Bázisfelbontás
LU-felbontás
Egyenletrendszer megoldása
5. Determináns fejben
Mikor 0
Determináns értéke elemi sorműveletekkel
$n \times n$-es determináns*
Sor- vagy oszlopműveletek?*
Vandermonde-determináns