1. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket, majd írjuk fel az összes megoldást a legkisebb abszolút értékű megoldással is!

$$2x + 3y + 6z = 49 \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 \phantom{{}- x_3} &= 5 \end{aligned}$$

2. Hány megoldása van az alábbi bővített mátrixú egyenletrendszernek, ha $\mathbb{R}$, ha $\mathbb{F}_2$, illetve ha $\mathbb{F}_3$ fölött oldjuk meg?

$$\left[\begin{array}{cccr|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

3. Az alábbi $\mathbb{F}_3$ fölötti egyenletrendszer a és b milyen értékeire lesz inkonzisztens? És milyen értékek esetén lesz több megoldása? Soroljuk fel ezeket!

$$\begin{aligned} x + y + az &= b \\ 2x + y + z &= 0 \\ y + z &= 1 \end{aligned}$$

4. Az $\mathbb{R}^4$-beli $\mathbf{a} = (1,1,1,0)$, $\mathbf{b} = (1,-1,1,1)$, $\mathbf{c} = (1,2,4,0)$ és $\mathbf{d} = (2,1,-1,0)$ vektorok mely nem üres részhalmaza alkot lineárisan független vektorrendszert? Írjuk fel a $\mathbf{c}$ vektor koordinátás alakját a $\mathcal{B} = \{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d}\}$ bázisban és a $\mathcal{C} = \{\mathbf{a},\mathbf{d}\}$ bázisban!

5. Elemi sor- és ha szükséges elemi oszlopműveletekkel számítsuk ki annak a szalagmátrixnak a determinánsát, amelynek főátlójában 0-k, alatta és fölötte 1-esek állnak.

6. Határozzuk meg az alábbi mátrixok kitüntetett altereit egy-egy bázisuk megadásával.

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \\ 9 & 3 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

7. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ egy tetszőleges valós mátrix, és tekintsük a sorterének és nullterének egy-egy bázisát. A lineáris algebra alaptételét (mely szerint e két altér merőleges kiegészítő alterek) igazoljuk, hogy e bázisok egyesítése bázisa $\mathbb{R}^n$-nek. Igazoljuk, hogy $\mathbb{R}^n$ minden vektora egyértelműen előáll egy sortérbe és egy nulltérbe eső vektor összegeként!

8. Elemi sorműveletekkel számítsuk ki az alábbi mátrixok inverzét!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}$$

9. Adjuk meg az alábbi mátrixok LU-felbontását:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 5 \\ 6 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

10. Az előző LU-felbontások segítségével oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket!

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= 6 \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= -4\,, \\ 2x_2 - 2x_3 &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 9x - y + z &= 3 \\ 3x + 5y + 5z &= 5 \\ 6x - 2y \phantom{{}+5z} &= 2 \end{aligned}$$

11. Adjuk meg az alábbi mátrixok PLU-felbontását úgy, hogy mindig a legnagyobb abszolút értékű elemmel elimináljuk az oszlop többi nemnulla elemét (vagyis pl. $\mathbf{A}$-ban első lépésként az első és harmadik sort cseréljük fel).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 4 & 6 & -2 \\ 8 & 8 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 9 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Feladatok az online tananyagból

2. Gauss-módszer 4
Redukált lépcsős alak
Gauss–Jordan-módszer 2
Szimultán egyenletrendszer
Síkok közös pontja 2
Oszlopmodell 2
Egyenletrendszer véges testek fölött
Hipersík explicit és implicit egyenletrendszere.
3. Mátrix rangja 2
Generált altér R4-ben
Altér 1, Altér 2, Altér 3
Altér bázisa 1
Altér bázisa, koordinátás alak
Nulltér
Mátrix kitüntetett altereinek dimenziója 2.
Altér merőlegese 1
Hipersíkba eső pontok
Mátrix kitüntetett alterei
Egyenletrendszer minimális abszolútértékű megoldása
Lineáris egyenletrendszer véges test felett
4. Mátrix inverze
Egyenletrendszer megoldása
Felbontás szimmetrikus és ferdén szimmetrikus összegére
Bázisfelbontás
LU-felbontás
Egyenletrendszer megoldása
5. Determináns fejben
Mikor 0
Determináns értéke elemi sorműveletekkel
$n \times n$-es determináns*
Sor- vagy oszlopműveletek?*
Vandermonde-determináns