

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Σ

Matematika A1a 2. ZH 2019-04-25 Neptun: _____ Név: _____ Gyv: _____

A dolgozat feladatainak végeredményeit írjuk a keretbe, de a megoldás is szerepeljen a lapon! (Ha erre már nem férne el, a többi lap is beadandó! Minden további papírlap jobb felső sarkára mindenki írja föl a saját nevét és a Neptun-kódját!) A feladatok megoldásához semmilyen segédeszköz nem használható! Egymásról másolni, megoldást bármilyen módon átadni, beszélgetni a ZH közben nem szabad!

1. Döntsük el, hogy az alábbi állítások igazak vagy hamisak (I vagy H)! (1 pont)

(a) Ha az f függvény folytonos a korlátos I intervallumon, akkor van maximuma és minimuma az I intervallumon.

(b) Ha az f függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon és differenciálható az (a, b) intervallumon, és a $c \in (a, b)$ pontban $f'(c) = 0$, akkor f -nek c -ben szélsőértéke van.

2. Döntsük el, hogy az alábbi állítások igazak vagy hamisak (I vagy H)! (1 pont)

(a) Ha f folytonos az $[a, b]$ intervallumon, akkor bármely $f(a)$ és $f(b)$ közé eső értéket felvesz az $[a, b]$ valamely pontjában.

(b) Ha f differenciálható az $[a, b]$ intervallumon, akkor f' bármely $f'(a)$ és $f'(b)$ közé eső értéket felvesz az $[a, b]$ valamely pontjában.

3. Fejezzük be az alábbi tételt a megfelelő képlettel (Lagrange-féle középértéktétel): Ha f folytonos $[a, b]$ -n és diffható (a, b) -n, akkor van olyan $c \in (a, b)$, amelyre (1 pont)

4. Egészítsük ki az alábbi tételt (L'Hôpital-szabály) a két bekeretezett üres hely kitöltésével! (1 pont)
Jelöljön a és L valós számokat. Legyen f és g két olyan valós függvény,

- melyek diffhatók egy nyílt I intervallumon, kivéve esetleg annak egy a pontját,

• , ha $x \neq a$ és $x \in I$,

• $\lim_a f = \lim_a g = 0$,

• létezik az $L = \lim_a \frac{f'}{g'}$ határérték.

Ekkor

5. Döntsük el, hogy az alábbi állítások igazak vagy hamisak (I vagy H)! (1 pont)

(a) Ha f szigorúan monoton növekvő az $[a, b]$ intervallumon, akkor $f' > 0$ az (a, b) intervallumon.

(b) Ha f legalább kétszer differenciálható (a, b) -n, és a $c \in (a, b)$ helyen $f''(c) = 0$, akkor f -nek c -ben inflexiós pontja van.

6. Számítsuk az alábbi függvények deriváltját! (3 pont)

(a) $\frac{1 + \sin x}{x}$ (b) 2^{x^2+1} (c) $\operatorname{ctg}^3 x$

7. Adjuk meg az $f(x) = \sin \sqrt{x}$ függvény $a = \pi^2$ pontbeli érintőjének egyenletét! (2 pont)

8. Oldjuk meg az alábbi számítási feladatokat!

(3 pont)

(a) $\arccos \cos \frac{17\pi}{3} = ?$, (b) $(\arcsin \sin x)' = ?$, (c) Fejezzük ki a 2^x függvényt e^x és $\ln x$ segítségével!

9. (a) Implicit deriválás: $y^2 = x - y$, $y' = ?$, $y'' = ?$,

(b) L'Hôpital-szabály: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x}{e^{2x}} = ?$

(2+1 pont)

10. Legyen $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{3}x$. (a) Határozzuk meg f kritikus pontjait, és azokban a szélsőérték jellegét! (b) Hol konvex a függvény? (3+1 pont)

11. Határozzuk meg az $f(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 8x^2 + 16x + 3$ polinom monoton növekvő és csökkenő szakaszait (megkeresve a derivált zérushelyeit pl. a Horner-módszerrel). (2 pont)