1. MAT A1b vizsga. 2015-01-09 Neptun: _ _ _ _ _ _ Név: ____________________

1. Egészítsük ki az alábbi tételeket úgy, hogy igazak legyenek. *(10 pont)*

a) Mikor 0?

$\mathbf{ab} = 0$ pontosan akkor, ha

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ pontosan akkor, ha

$\mathbf{abc} = 0$ pontosan akkor, ha

b) Láncszabály: Ha az f függvény differenciálható a(z) ☐ helyen, és a g függvény differenciálható a ☐ helyen, akkor az $f \circ g$ függvény differenciálható az x helyen, és $(f \circ g)'(x) =$

c) Lagrange középértéktétele: Legyen az f függvény

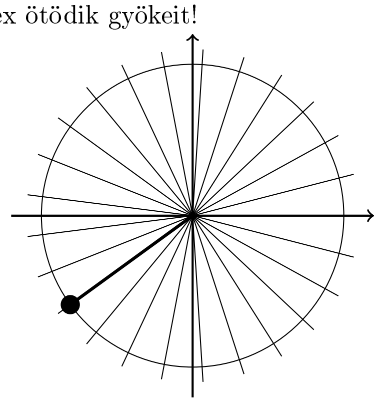
Ekkor létezik az (a, b) intervallumban legalább egy olyan c pont, amelyre

d) Középértéktétel határozott integrálokra: Ha f ☐ az $[a, b]$ intervallumon, akkor valamilyen $c \in [a, b]$-re

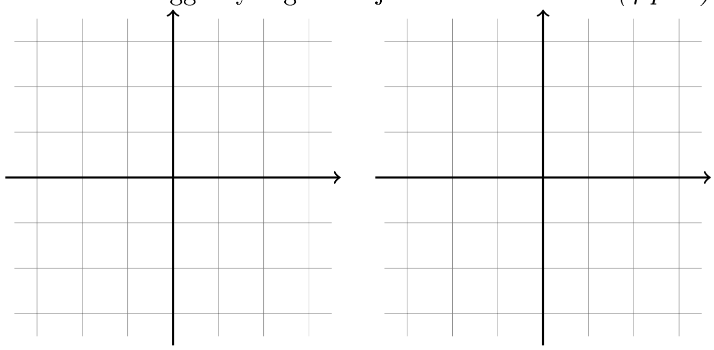
2. Igazoljuk igazságtáblával az $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$ logikai azonosságot! *(4 pont)*

A	$\Rightarrow$	B	$\equiv$	$\neg$	B	$\Rightarrow$	$\neg$	A

3. Az alábbi ábrán a komplex számsíkon ábrázolunk egy egységnyi abszolút értékű komplex számot. Rajzoljuk be a komplex ötödik gyökeit! *(3 pont)*



4. A bal oldali koordinátarendszerbe rajzoljuk be vázlatosan az $\ln|x-1|$ függvény grafikonját, a jobb oldaliba pedig a $\operatorname{ch} x$ és az $\operatorname{arch} x$ függvények grafikonját: *(4 pont)*



5. Az alábbi állítások egyike sem igaz. Adjunk mindegyikre egy példát, mely igazolja, hogy az állítás nem igaz! *(6 pont)*

a) Egy valós együtthatós polinom mindig felírható valós elsőfokú tényezők (valós gyöktényezők) szorzataként!

b) A korlátos I intervallumon értelmezett bármely folytonos valós f függvény felveszi értékként értékkészletének infimumát az I valamely pontjában! (Ide egy megfelelő függvénygrafikon is elég.)

c) Ha a $H \subseteq \mathbf{R}$ halmazon az F és G függvények deriváltja egyaránt az f függvény, akkor van olyan $C \in \mathbf{R}$ szám, hogy minden $x \in H$ esetén $F(x) = G(x) + C$. (Itt is elég f grafikonja.)

6. Milyen helyettesítéssel számíthatók ki az alábbi integrálok (kiszámítani nem kell)? *(5 pont)*

1. $\int \sqrt{9 - 4x^2}\,\mathrm{d}x$

2. $\int \sqrt{1 + x^2}\,\mathrm{d}x$

3. $\int 2^{\sin 3x} \cos 3x\,\mathrm{d}x$

7. Igazoljuk, hogy ha $p > 1$, akkor $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ integrál konvergens! *(4 pont)*

8. Számítsuk ki az alábbi integrálok értékét! *(14 pont)*

(a) $\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x =$

(b) $\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x =$

(c) $\int \sin^2 3x\,\mathrm{d}x =$

(d) $\int 9x^2 \ln x\,\mathrm{d}x =$