1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\sum$

Matematika A1a 2. ZH **2019-04-25** **Neptun:** ______ **Név:** ______________________________ **Gyv:** ___

A dolgozat feladatainak végeredményeit írjuk a keretbe, de a megoldás is szerepeljen a lapon! (Ha erre már nem férne el, a többi lap is beadandó! Minden további papírlap jobb felső sarkára mindenki írja föl a saját nevét és a Neptun-kódját!) A feladatok megoldásához semmilyen segédeszköz nem használható! Egymásról másolni, megoldást bármilyen módon átadni, beszélgetni a ZH közben nem szabad!

1. Döntsük el, hogy az alábbi állítások igazak vagy hamisak (I vagy H)! *(1 pont)*

(a) Ha az f függvény folytonos a korlátos I intervallumon, akkor van maximuma és minimuma az I intervallumon. $\boxed{\text{H}}$

(b) Ha az f függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon és differenciálható az (a, b) intervallumon, és a $c \in (a, b)$ pontban $f'(c) = 0$, akkor f-nek c-ben szélsőértéke van. $\boxed{\text{H}}$

2. Döntsük el, hogy az alábbi állítások igazak vagy hamisak (I vagy H)! *(1 pont)*

(a) Ha f folytonos az $[a, b]$ intervallumon, akkor bármely $f(a)$ és $f(b)$ közé eső értéket felvesz az $[a, b]$ valamely pontjában. $\boxed{\text{I}}$

(b) Ha f differenciálható az $[a, b]$ intervallumon, akkor f' bármely $f'(a)$ és $f'(b)$ közé eső értéket felvesz az $[a, b]$ valamely pontjában. $\boxed{\text{I}}$

3. Fejezzük be az alábbi tételt a megfelelő képlettel (Lagrange-féle középértéktétel): Ha f folytonos $[a, b]$-n és diffható (a, b)-n, akkor van olyan $c \in (a, b)$, amelyre *(1 pont)*

$$\boxed{f'(c) = (f(b) - f(a))/(b - a)}$$

4. Egészítsük ki az alábbi tételt (L'Hôpital-szabály) a két bekeretezett üres hely kitöltésével! *(1 pont)*
Jelöljön a és L valós számokat. Legyen f és g két olyan valós függvény,

- melyek diffhatók egy nyílt I intervallumon, kivéve esetleg annak egy a pontját,
- $\boxed{g'(x) \neq 0}$, ha $x \neq a$ és $x \in I$,
- $\lim_a f = \lim_a g = 0$,
- létezik az $L = \lim_a \frac{f'}{g'}$ határérték.

Ekkor $\boxed{L = \lim_a \frac{f'}{g'}}$

5. Döntsük el, hogy az alábbi állítások igazak vagy hamisak (I vagy H)! *(1 pont)*

(a) Ha f szigorúan monoton növekvő az $[a, b]$ intervallumon, akkor $f' > 0$ az (a, b) intervallumon. $\boxed{\text{H}}$

(b) Ha f legalább kétszer differenciálható (a, b)-n, és a $c \in (a, b)$ helyen $f''(c) = 0$, akkor f-nek c-ben inflexiós pontja van. $\boxed{\text{H}}$

6. Számítsuk az alábbi függvények deriváltját! *(3 pont)*

(a) $\dfrac{1+\sin x}{x}$ *(b)* 2^{x^2+1} *(c)* $\operatorname{ctg}^3 x$

(a) $\dfrac{\cos x}{x} - \dfrac{1+\cos x}{x^2}$, *(b)* $2^{x^2+2} x \ln 2$,

(c) $-3\dfrac{\operatorname{ctg}^2 x}{\sin^2 x} = -3\dfrac{\cos^2 x}{\sin^4 x}$

7. Adjuk meg az $f(x) = \sin\sqrt{x}$ függvény $a = \pi^2$ pontbeli érintőjének egyenletét! *(2 pont)*

$y = -\dfrac{1}{2\pi}x + \dfrac{\pi}{2}$ vagy $y = -\dfrac{1}{2\pi}(x - \pi^2)$

Mivel

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}, \quad f'(\pi^2) = -\frac{1}{2\pi}, \quad f(\pi^2) = 0,$$

ezért az érintő egyenlete

$$y = -\frac{1}{2\pi}(x - \pi^2), \text{ azaz } y = -\frac{1}{2\pi}x + \frac{\pi}{2}.$$

8. Oldjuk meg az alábbi számítási feladatokat! *(3 pont)*

(a) $\arccos\cos\dfrac{17\pi}{3} = ?$, *(b)* $(\arcsin\sin x)' = ?$, *(c)* Fejezzük ki a 2^x függvényt e^x és $\ln x$ segítségével!

(a) $\dfrac{\pi}{3}$, *(b)* $\dfrac{\cos x}{|\cos x|}$, *(c)* $e^{x\ln 2}$

9. *(a)* Implicit deriválás: $y^2 = x - y$, $y' = ?$, $y'' = ?$, *(b)* L'Hôpital-szabály: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x}{e^{2x}} = ?$ *(2+1 pont)*

$y' = \dfrac{1}{2y+1}$, $y'' = -\dfrac{2y'}{(2y+1)^2} = -\dfrac{2}{(2y+1)^3}$, 0

10. Legyen $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \dfrac{2}{3}x$. *(a)* Határozzuk meg f kritikus pontjait, és azokban a szélsőérték jellegét! *(b)* Hol konvex a függvény? *(3+1 pont)*

$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} - \frac{2}{3} \rightsquigarrow$ kritikus pontok $x = 0$ (f' nincs értelmezve), $x = 1$ (itt $f'(1) = 0$).
MIN $x = 0$, mert $f(0) = 0$ és környezetében a fv. pozitív.
MAX $x = 1$, mert $f''(1) < 0$.
$f''(x) = -\frac{1}{9}x^{-4/3} \rightsquigarrow f''(x) < 0$ sehol nem konvex.

11. Határozzuk meg az $f(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 8x^2 + 16x + 3$ polinom monoton növekvő és csökkenő szakaszait (megkeresve a derivált zérushelyeit pl. a Horner-módszerrel). *(2 pont)*

$f'(x) = 4(x^3 - x^2 - 4x + 4) = 4(x+2)(x-2)(x-1) \rightsquigarrow$ MON nő $(-2,1) \cup (2,\infty)$, MON csökk $(-\infty,-2) \cup (1,2)$