

## ► = kötelező bizonyítás;

Minden vizsgán lesznek elméleti kérdések, tételek, definíciók, és a megadott bizonyítások valamelyike. Az alábbi számítási feladattípusok biztosan lesznek: komplex számok, geometria, határérték, differenciálszámítás és alkalmazásai, és legalább három integrálszámítási feladat (helyettesítés, parciális integrálás, racionális törtfüggvény, improprius integrál).

**1. Bevezetés (e01):** • logikai műveletek és műveletábrák, azonosságok, ► az előadáson elhangzott kétváltozós logikai azonosságok bizonyítása igazságtáblával, • kvantorok, logikai műveleteket és kvantorokat tartalmazó állítások tagadása • végtelen számhalmazok számossága

**2. Komplex számok (e02):** • komplex szám algebrai alakja, komplex számsík • műveleti tulajdonságok, konjugált és absz. ért. tulajdonságai • binomiális-tétel • *trigonometrikus alak*, műveletek trig. alakban adott komplex számokkal, gyökvonás, *egységgyökök*, • az algebra alaptétele • valós együtthatós polinom felbomlik elsőfokú és negatív diszkriminánsú másodfokúak szorzatára (e14)

**3. Vektorok (e03):** • vektorműveletek (összeadás, skalárral szorzás, skaláris és vektori szorzás, vegyes szorzat), vektor abszolút értéke, két vektor szöge • vektorműveletek műveleti tulajdonságai • a skaláris, vektori és a vegyes szorzat geometriai jelentése (vektor egy másik vektorra eső merőleges vetülete és annak hossza, paralelogramma területe, paralelepipedon térfogata) • milyen feltételekkel lesz  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ ,  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{abc} = 0$  • a műveletek koordinátás alakja 3D-ben • orientáció •  $n$ -dimenziós tér • a skaláris szorzat és alaptulajdonságai • hossz (norma), szög, merőlegesség • Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség • *vektorok lineáris függetlensége* és ekvivalens alakja

**4. Tételek (e04):** • egyenes és sík explicit és implicit egyenlet(rendszer)ei (és ezek meghatározása megadott adatokból, továbbá koordináta-tengellyel ill. koordináta-síkkal párhuzamos egyenes és sík egyenlet(rendszer)ei) • egyenes és sík metszéspontjának meghatározása ► pont és egyenes távolsága a térben • pont és sík távolsága

**5. Függvényhatárérték (e05):** • *függvényhatárérték* • a határérték kiszámítása, szandvicstétel • függvények összegének, szorzatának, hányadosának, skalárszorosának, racionális kitevős hatványának határértéke • jobb és bal oldali határérték, határérték a végtelenben •  $(\sin x)/x$  határértéke • a *végtelen, mint határérték*, aszimptoták

**6. Folytonosság (e06):** • *pontbeli folytonosság* • szakadási hely (megszüntethető, ugrás, lényeges) • hézagpont, pólus • *folytonos függvények* és tulajdonságaik, féloldali folytonosság • függvények folytonos kiterjesztése • korlátos zárt intervallumon értelmezett folytonos függvények: Bolzano-tétel, Bolzano–Darboux-tétel, szélsőérték, Weierstrass-tétel

**7. Elemi függvények és inverzeik (e07, e13):**

• trigonometrikus függvények • polinomok: maradékos osztás, gyöktényező, Horner-módszer, racionális gyökteszt • exponenciális és hiperbolikus függvények • injektív (invertálható) függvény, *függvény inverze*, grafikonjaik kapcsolata, inverz függvény meghatározása • trigonometrikus

függvények injektív megszorításai és inverzeik, arc és area függvények • az  $e$  szám • logaritmus és exponenciális függvények

**8. Differenciálás (e08):** • érintő, *derivált*, deriváltfüggvény, a derivált ábrázolása, jobb és bal oldali derivált ► folytonosság és differenciálhatóság kapcsolata • Darboux-tétel •  $x^n$  deriváltja ► *sin* függvény deriváltja • deriválási szabályok, összetett függvények deriváltja, láncszabály, implicit függvény deriváltja ► *arcsin* deriváltja • elemi függvények és inverzeik deriváltjai (pl. *log* deriváltja)

**9. Derivált alkalmazásai (e09, e10):** • függvény szélsőértékei, abszolút maximum, minimum, lokális maximum, minimum ► az első derivált és a lokális szélsőérték • kritikus pont • Rolle-, Lagrange- és Cauchy-féle középértéktételek és geometriai szemléltetésük • a Lagrange-féle középértéktétel következményei: egy intervallumon csak a konstans függvény deriváltja 0; egy intervallumon azonos deriválttal rendelkező függvények konstansban különböznek • monoton függvények • első derivált teszt monoton függvényekre • a derivált előjelváltása és a szélsőérték kapcsolata • konvex, konkáv függvény •  $f$  konvexitása és  $f'$  szigorú monotonitásának kapcsolata •  $f$  konvexitása és  $f''$  előjele közti kapcsolat • inflexió pont létezése és  $f''$  nulla volta közti kapcsolat • második derivált és lokális szélsőérték • határozatlan alakok ( $0/0$ ,  $\infty/\infty$ ,  $0\infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $1^\infty$ ,  $\infty^0$ ,  $0^0$ ), L'Hospital-szabály • *log*, hatvány, polinom, *exp* függvények hányadosának aszimptotikus viselkedése • egymást egy pontban  $n$ -edrendben érintő görbék • *Taylor-polinom*, Taylor-tétel • függvényvizsgálat (e10)

**10. Integrálás (e11, e12):** • *primitív függvény*, *határozatlan integrál* • alapintegrálok • integrálási szabályok • fordított láncszabály:  $f(ax + b)$ ,  $f'(x)/f(x)$ ,  $f^s(x)f'(x)$ , •  $\sin^n \cos^m$  integrálja • helyettesítéses integrál • parciális integrálás (a négy alaptípus) • Riemann-összeg (integrálközelítő összeg), felosztás és normája, *határozott integrál*, *mint a Riemann-összegek határértéke* • görbe alatti terület és határozott integrál • folytonosság és integrálhatóság kapcsolata • véges sok helyen való megváltoztathatóság • műveleti tulajdonságok, integrálegyenlőtlenségek • függvény átlaga (középértéke) • középértéktétel határozott integrálokra ► a változó felső határu integrál deriváltja (a végpontokra vonatkozó rész nélkül) ► Newton–Leibniz-tétel • helyettesítési szabály • helyettesítés és parciális integrálás határozott integrálban • páros és páratlan függvények határozott integrálja

**11. Integrálási technikák (e14):** • racionális törtfüggvények integrálása • trigonometrikus integrálok: linearizáció, (*sin*- és *cos*-hatványok e11-ben) •  $1/\sin x$  és  $1/\cos x$  integrálja • fordított helyettesítés ( $e^x$ ,  $\tan \frac{x}{2}$ ,  $\sqrt[n]{x}$ , ...)

**12. Improprius integrál (e15):** • improprius integrálok ►  $\int_1^\infty 1/x^p dx$  integrál konvergencia, ha  $p > 1$ , divergens, ha  $p \leq 1$  ►  $\int_0^1 1/x^p dx$  • konvergenciakritériumok

**13. Integrál alkalmazásai (e16):** • görbék által határolt terület • a kör területe • függvény grafikonjaként megadott görbe ívhossza • forgástest felszíne • térfogat, forgástest térfogata • a gömb térfogata • henger, félgömb és kúp térfogata közti arányok (*Cavalieri-elv*)