BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

Matematika A1a – Analízis

BMETE90AX00

Improprius integrál

H607, EIC – 2019-05-15

Wettl Ferenc
ALGEBRA TANSZÉK

Tartalom

Improprius integrálok

Integrálás végtelen intervallumon

Függőleges aszimptotájú függvények

Összehasonlító konvergencia kritériumok

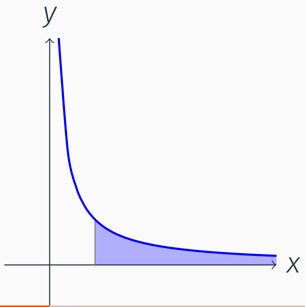
Improprius integrálok

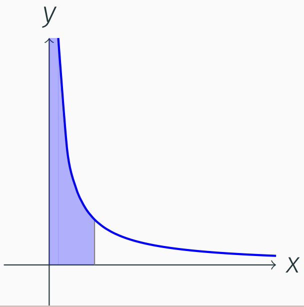
Improprius integrálok

Eddig határozott integrálásnál megköveteltünk két dolgot:

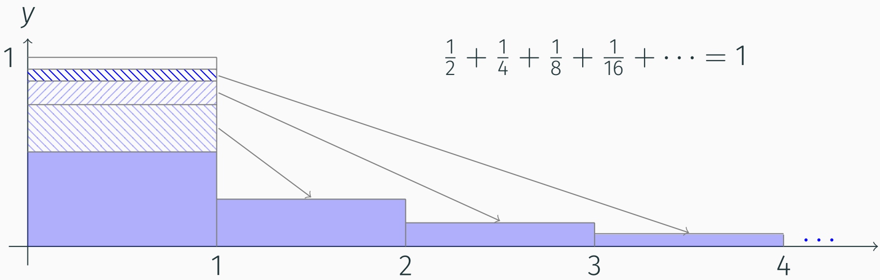
- az integrálási tartomány egy véges intervallum legyen,
- az integrálandó függvény legyen korlátos az integrálási tartományon.

A függvény alatti terület ettől eltérő esetekben is lehet jól definiált:





Sőt, végtelen kiterjedésű tartomány területe is lehet véges.



$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=1$$

Integrálás végtelen intervallumon

D

Definíció

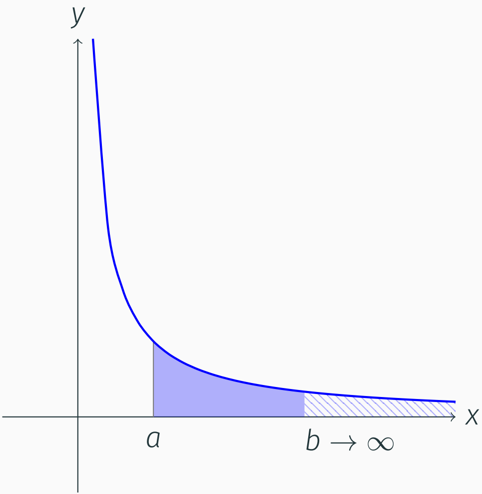
Ha $f(x)$ folytonos az $[a, \infty)$ (ill. $(-\infty, a]$) intervallumon, akkor

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ \left(\text{ill. } \int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Ha $f(x)$ folytonos $\mathbb{R}$-en, és c tetszőleges valós szám, akkor

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^\infty f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ha bármelyik esetben a határérték létezik és véges, azt mondjuk, hogy az improprius integrál konvergens, és a határérték az integrál értéke.


y
x
a
$b \to \infty$

P $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \ln x\cdot\frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^b =$
$\lim_{b\to\infty}\frac{(\ln b)^2}{2} = \infty$, vagyis ez az improprius integrál nem konvergens.

$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \ln x\cdot x^{-2}\,dx \implies$ parciálisan integrálva:

$$= \lim_{b\to\infty}\left\{\left[\ln x\cdot\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^b - \int_1^b \frac{1}{x}\cdot\frac{x^{-1}}{-1}\,dx\right\} =$$

$$\lim_{b\to\infty}\left\{-\frac{\ln b}{b} + \int_1^b x^{-2}\,dx\right\} = \lim_{b\to\infty}\left\{-\frac{\ln b}{b} + \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^b\right\} =$$

$\lim_{b\to\infty} -\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b} + 1 = 1$, vagyis ez az integrál konvergens.

Az $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ integrál

Ha $p = 1$, akkor:
$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} [\ln x]_1^b = \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty,$ vagyis ekkor az integrál nem konvergens.

Ha $p \neq 1$, akkor:
$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-p}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} \frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}.$

Ha $p < 1$, akkor a fenti határérték $\infty,$ így az integrál nem konvergens.

Ha $p > 1$, akkor a fenti határérék $-\frac{1}{1-p},$ így az integrál konvergens, és értéke a határérték, vagyis $\frac{1}{p-1}.$

Függőleges aszimptotájú függvények

Függőleges aszimptotájú függvény integrálása

D

Definíció

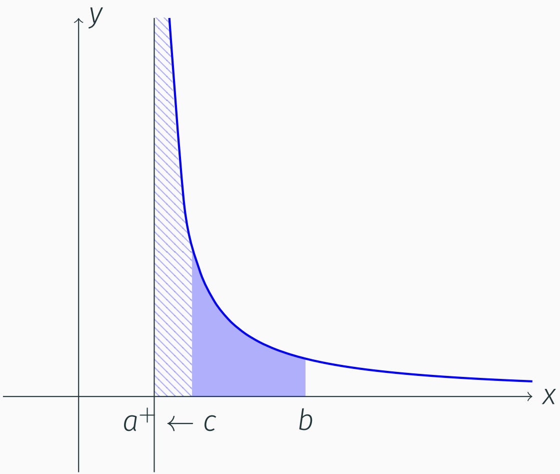
Ha $f(x)$ folytonos az $[a,b)$ (ill. $(a,b]$) intervallumon, de $x \to b^-$ (ill. $x \to a^+$) esetén nem korlátos, akkor

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \quad \left(\text{ill. } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \right).$$

Ha $f(x)$ folytonos $[a,s) \cup (s,b]$-n, de $x \to s$ esetén nem korlátos, akkor

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^s f(x)\,\mathrm{d}x + \int_s^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ha bármelyik esetben a határérték létezik és véges, azt mondjuk, hogy az improprius integrál konvergens, és a határérték az integrál értéke.


y
x
$a^+ \leftarrow c$
b

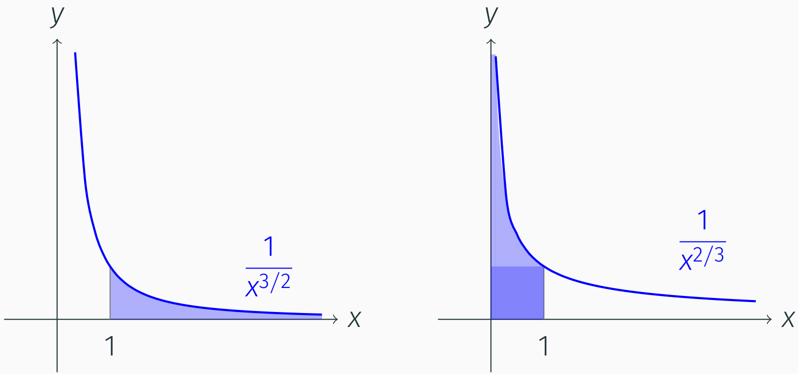
Az $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ integrál

Ha $p = 1$, akkor:
$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to 0+} \int_c^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to 0+} [\ln x]_c^1 = \lim_{c\to 0+} -\ln c = \infty$, vagyis ekkor az integrál nem konvergens.

Ha $p \neq 1$, akkor:
$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{c\to 0+} \int_c^1 x^{-p}\,dx = \lim_{c\to 0+} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_c^1 =$
$\lim_{c\to 0+} \frac{1}{1-p} - \frac{c^{1-p}}{(1-p)}$.

Ha $p > 1$, akkor a fenti határérték ∞, így az integrál nem konvergens.

Ha $p < 1$, akkor a fenti határérék $\frac{1}{1-p}$, így az integrál konvergens, és értéke a határérték, vagyis $\frac{1}{1-p}$.


y
x
1
$\frac{1}{x^{3/2}}$
y
x
1
$\frac{1}{x^{2/3}}$

Összehasonlító konvergencia kritériumok

Összehasonlító konvergencia kritériumok

Á

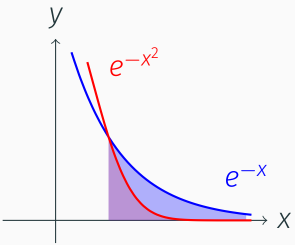
Majoráns és minoráns kritérium

Legyenek f és g az $[a, \infty)$ intervallumon folytonos függvények, melyekre minden $x \geq a$ esetén $0 \leq f(x) \leq g(x)$ teljesül. Ekkor:

1. ha $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ konvergens, akkor $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ is konvergens (majoráns kritérium);
2. ha $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ nem konvergens, akkor $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ sem konvergens (minoráns kritérium).

m Az állítás a többi típusú improprius integrál esetén is igaz.

P Konvergens-e az $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ integrál?



m A definíció szerint $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x^2}\,dx$, viszont a jobb oldali határértéken belül szereplő határozott integrált nem tudjuk közvetlenül kiszámolni. Ugyanakkor mivel $x \geq 1$-re $0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$, és

$$\int_1^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{e} - e^{-b} = \frac{1}{e},$$

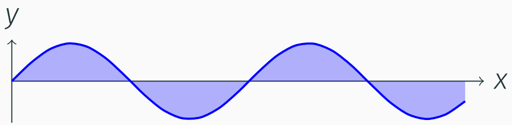
a majoráns kritérium miatt az eredeti integrál is kovergens.

Á

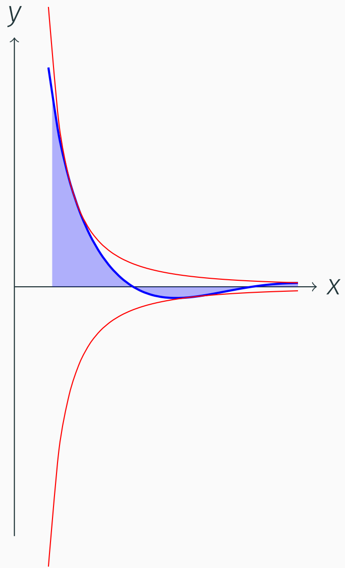
Általános majoráns kritérium

Legyenek f és g az $[a, \infty)$ intervallumon folytonos függvények, melyekre minden $x \geq a$ esetén $|f(x)| \leq g(x)$ teljesül. Ekkor ha $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ konvergens, akkor $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ is konvergens.

P $\int_0^\infty \sin x \, dx$ divergens, bár az integrálfüggvény $I(b) = \int_0^b \sin x \, dx$ korlátos: $I(b)$ értéke 0 és $\int_0^\pi \sin x \, dx = 2$ között változik, de mindkettőt felveszi akármilyen nagy b-re is.



P $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ konvergens, mert $\displaystyle\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$, és $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ konvergens.



P Bizonyítsuk be, hogy az $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}$ konvergens.

m A fv. a 0-nál nem korlátos, ezért két improprius integrál összegére bontjuk:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

$\left|\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\right| \leq x^{-3/2}$, és $\int_1^\infty x^{-3/2}\,\mathrm{d}x$ konvergens, így $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ is az. $[0,1]$-en $x^{-3/2}$ integrálja nem konvergens, ezért nem érdemes azzal majorálni. Viszont tudjuk: $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq 1$, ezért $\left|\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ a $(0,1]$-en, továbbá $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ konvergens, tehát $\int_0^1 \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ is konvergens.