BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

Matematika A1a – Analízis

BMETE90AX00

Az exp és ln függvények

H607, EIC – 2019-04-24

Wettl Ferenc

ALGEBRA TANSZÉK

Tartalom

A logaritmus mint integrálfüggvény

A log függvény tulajdonságai

$\exp(x) = e^x$

A hatványozás műveleti szabályai

A logaritmus mint integrálfüggvény

A logaritmus mint integrálfüggvény

Az integrál alkalmazásával és az $\ln$ és az $\exp$ függvények újradefiniálásával megmutatjuk, hogy a^r $(r \in \mathbb{Q})$ függvénynek létezik folytonos kiterjesztése $\mathbb{R}$-re.

D **A log (ln) függvény**

$$\log(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0)$$

- Belátjuk, hogy $\log(x)$ diffható, szig. monoton növő fv. $(0, \infty)$-en;
- definiáljuk $\exp(x)$-et mint a $\log(x)$ inverz függvényét;
- belátjuk, hogy $\exp(x)$ (illetve általánosabban $\exp(x \log(a))$) az e^r (illetve a^r) folytonos kiterjesztése $\mathbb{Q}$-ról $\mathbb{R}$-re, így $\exp(x) = e^x$ és $\log(x) = \ln x$;
- bebizonyítjuk a logaritmus és a valós kitevőjű hatványozás műveleti tulajdonságait.

A log függvény tulajdonságai

T **Tétel**

$\log(x)$ differenciálható, és a deriváltja $\frac{1}{x}$.

B $x > 1$-re az állítás a változó felső határú integrálok tételéből következik. $0 < x < 1$ esetén tekinthetjük $\log(x)$ helyett az $\frac{1}{x}$ valamely $0 < c < x$-nél kezdődő integrálfüggvényét: $\int_c^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$. Ez csak egy konstans összeadandóban ($\int_c^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$-ben) különbözik $\log(x)$-től, és alkalmazható rá az előbbi tétel (c, ∞)-en, így $\log(x)$ is diffható itt, és a deriváltja megegyezik $\frac{1}{x}$-szel.

Á

A log függvény műveleti tulajdonságai

1. $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$.
2. $\log(a^r) = r\log(a)$ $\forall r \in \mathbb{Q}$-ra.

B1. $\log(ab) - \log(a) = \int_1^{ab} \frac{1}{t}\,dt - \int_1^{a} \frac{1}{t}\,dt = \int_a^{ab} \frac{1}{t}\,dt$. A $t = au$, $dt = a\,du$ helyettesítéssel ez tovább
$= \int_1^{b} \frac{1}{au} a\,du = \int_1^{b} \frac{1}{u}\,du = \log(b)$.

B2. 1. miatt $n \in \mathbb{N}^+$-ra
$\log(a^n) = \log(a \cdot a \cdots a) = \log(a) + \log(a) + \cdots + \log(a) = n\log(a)$,
$\log(a^0) = \log 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = 0 = 0 \cdot \log(a)$, és
$0 = \log 1 = \log(a^{-n} \cdot a^n) = \log(a^{-n}) + \log(a^n) \Rightarrow$
$\log(a^{-n}) = -\log(a^n) = -n\log(a)$. Végül $r = \frac{p}{q}$-ra ($p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$):
$q \cdot \log(a^{p/q}) = \log(a^p) = p\log(a) \Rightarrow \log(a^{p/q}) = \frac{p}{q}\log(a)$.

Á

Állítás

$\log(x)$ szigorúan monoton függvény, értékkészlete $\mathbb{R}$.

B $0 < a < b$-re

$$\log(b) - \log(a) = \int_1^b \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^a \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \geq (b-a)\frac{1}{b} > 0,$$

ugyanis $\frac{1}{t} \geq \frac{1}{b}$ az $[a,b]$ intervallumon. Így $\log(a) < \log(b)$.

Ebből következik, hogy $c > 1$-re $\log(c) > \log(1) = 0$,
és a műveleti szabályok miatt

$$\left.\begin{array}{l} \log(c^n) = n\log(c) \text{ akármilyen nagy,} \\ \log(c^{-n}) = -n\log(c) \text{ akármilyen kicsi} \\ \text{lehet, és } \log(x) \text{ folytonos} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \mathcal{R}(\log) = \mathbb{R}.$$

$$\exp(x) = e^x$$

D

Az exp függvény

Legyen $\exp(x)$ a $\log(x)$ inverz függvénye. Ez az eddigiek alapján diffható fv. $\mathbb{R}$-en, amelynek deriváltja

$$\exp'(x) = \frac{1}{\log'(\exp(x))} = \frac{1}{1/\exp(x)} = \exp(x).$$

Korábban a^x-et mint az a^r $(x \in \mathbb{Q})$ függvény $\mathbb{R}$-re való folytonos kiterjesztését definiáltuk, és e az a szám volt (egyértelmű?), amelyre $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x\big|_{x=0} = 1$.

T **Természetes alapú exponenciális és logaritmus függvény**

$\exp(x) = e^x$ és $\log(x) = \ln(x)$

B $r \in \mathbb{Q}$-ra és $a > 0$-ra $\exp(r \cdot \log(a)) = \exp(\log(a^r)) = a^r$,
így $\exp(x \log(a))$ az a^r ($r \in \mathbb{Q}$) fv. folytonos kiterjesztése, azaz

$$\exp(x \log(a)) = a^x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a^x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \exp(x \log(a)) = \exp(x \log(a)) \log(a) = a^x \log(a),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a^x \Big|_{x=0} = \log(a) = 1 \iff a = \exp(1), \text{ vagyis } e = \exp(1)$$

$$\exp(x) = \exp(x \cdot \log(e)) = e^x,$$

$\log(x) = \ln(x)$ az e^x inverz függvénye.

A hatványozás műveleti szabályai

A valós kitevőjű hatványozás műveleti szabályai

T **a^x műveleti tulajdonságai**

1) $a^{xy} = (a^x)^y$
2) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
3) $(ab)^x = a^x \cdot b^x$ tetszőleges $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ számokra.

B Az $a^x = \exp(x \log(a))$ definícióból következik a

$$\log(a^x) = x \log(a) \quad (a, b \in \mathbb{R},\ a > 0)$$

általánosítása a $\log(x)$ fv. 2. műveleti szabályának. A hatványazonosságokat beláthatjuk úgy, hogy a két oldal logaritmusát hasonlítjuk össze. Pl.
3) $\log((ab)^x) = x \log(ab) = x(\log(a) + \log(b)) =$
$x \log(a) + x \log(b) = \log(a^x) + \log(b^x) = \log(a^x \cdot b^x)$.