BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

# Matematika A1a – Analízis

BMETE90AX00

# Határozatlan integrál

H607, EIC – 2019-04-17

Wettl Ferenc
ALGEBRA TANSZÉK

# Tartalom

# Primitív függvény

# Primitív függvény

D **Definíció**

$F(x)$ az $f(x)$ primitív függvénye a $H \subseteq \mathbb{R}$ halmazon, ha $F'(x) = f(x)$ minden $x \in H$ esetén.

m Ha $F(x)$ primitív függvény, akkor $F(x) + C$ is az tetszőleges $C \in \mathbb{R}$ esetén.

Korábban már bizonyítottuk:

Á **Állítás**

Ha $F$ és $G$ is primitív függvénye $f$-nek egy nyílt $I$ intervallumon, akkor létezik $C \in \mathbb{R}$, hogy $G(x) = F(x) + C$ minden $x \in I$ esetén.

P $f(x) = \cos x$-nek $F(x) = \sin x$ primitív függvénye a teljes $\mathbb{R}$-en

# Határozatlan integrál

D **Definíció**

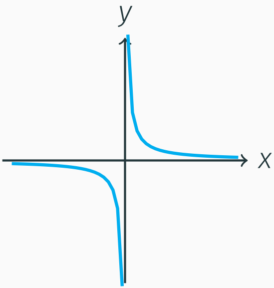
Az $f$ függvény határozatlan integrálja $f$ primitív függvényeinek összessége.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,$$

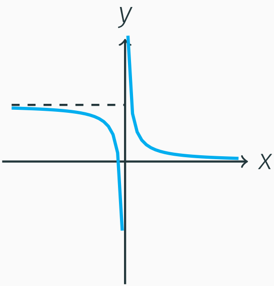
ahol $F$ az $f$ függvény egy primitív függvénye, és $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

m Itt feltesszük, hogy $F'(x) = f(x)$ egy intervallumon, és hogy ott vesszük a többi primitív függvényt is.

P Ha nem egy intervallumon vennénk a primitív függvényeket: $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \implies -\frac{1}{x^2}$-nek primitív függvénye az $\frac{1}{x}$:




de akkor ez is:




Viszont e két függvény különbsége nem konstans $\mathbb{R}\setminus\{0\}$-on.

**P** Ha $x > 0$, akkor

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \implies \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + C \text{ a } (0, \infty)\text{-en}$$

Ha $x < 0$, akkor

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x} \implies \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(-x) + C \text{ a } (-\infty, 0)\text{-n}$$

Összefoglalva azt is szoktuk írni, hogy

$$\boxed{\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C,}$$

de egyszerre vagy csak az $x > 0$ vagy csak az $x < 0$ esetre alkalmazzuk.

# Alapintegrálok

# Alapintegrálok

| $f(x)$ | $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ | feltétel |
|---|---|---|
| $x^a$ | $\frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$ | $a \in \mathbb{R},\ a \neq -1$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\ln\lvert x\rvert + C$ | $x < 0$ vagy $x > 0$ |
| $\sin x$ | $-\cos x + C$ | |
| $\cos x$ | $\sin x + C$ | |
| $\frac{1}{\cos^2 x}$ | $\operatorname{tg} x + C$ | $x \in \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right)\ k \in \mathbb{Z}$ |
| $\frac{1}{\sin^2 x}$ | $-\operatorname{ctg} x + C$ | $x \in \left(k\pi, (k+1)\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$ |
| $e^x$ | $e^x + C$ | |
| $\operatorname{sh} x$ | $\operatorname{ch} x + C$ | |
| $\operatorname{ch} x$ | $\operatorname{sh} x + C$ | |

| $f(x)$ | $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ | feltétel |
|---|---|---|
| $\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$ | $\operatorname{th} x + C$ | |
| $\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$ | $-\operatorname{cth} x + C$ | $x < 0$ vagy $x > 0$ |
| $\dfrac{1}{1+x^2}$ | $\operatorname{arctg} x + C$ | |
| $\dfrac{1}{1-x^2}$ | $\operatorname{arth} x + C$ | $x \in (-1, 1)$ |
| $\dfrac{1}{1-x^2}$ | $\operatorname{arcth} x + C$ | $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ |
| $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arcsin x + C$ | $x \in (-1, 1)$ |
| $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ | $\operatorname{arsh} x + C$ | |
| $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ | $\operatorname{arch} x + C$ | $x \in (1, \infty)$ |

# Integrálási szabályok

# Az integrálás általános szabályai

Á **Állítás**

- $\int f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$
- $\int c \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x$
- $\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = F(g(x)) + C$, ahol $F$ az $f$ egy primitív függvénye

B Az összegre és skalárszorosra vontakozó deriválási szabályból, illetve a láncszabályból következik.

P $\int 2\sqrt{x} + \frac{3}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int 2x^{1/2} + 3x^{-2}\,\mathrm{d}x = 2\frac{x^{3/2}}{3/2} + 3\frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{4}{3}x\sqrt{x} - \frac{3}{x} + C$

# A fordított láncszabály néhány speciális esete

Á $f(ax+b)$

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C,\ \text{ha } F'(x) = f(x)$$

B A láncszabály megfordítása $f(x)$, $g(x) \to ax+b$ szereposztással.

P $\displaystyle\int e^{2x+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x+3} + C$

Á $f'/f$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$$

B A láncszabály megfordítása $f(x) \to \frac{1}{x}$, $g(x) \to f(x)$ szereposztással.

P $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + C$

Á $f^s f'$

$$\int f^s(x) f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f^{s+1}(x)}{s+1} + C,\ \ s \neq -1$$

B A láncszabály megfordítása $f(x) \to x^s$, $g(x) \to f(x)$ szereposztással.

P $$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x = -\int (\cos x)^{-3}(-\sin x)\,\mathrm{d}x = -\frac{(\cos x)^{-2}}{-2} + C = \frac{1}{\cos^2 x} + C$$

P $\int \sin^3 x \, dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx =$
$\int \sin x + \cos^2 x(-\sin x) \, dx = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$

P $\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\sin 2x) + C =$
$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$
A $\cos^2 x$ függvény átalakításánál a
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$ képletekből
levezethető

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

linearizáló formulák egyikét használtuk.

## $\int \sin^n x \cos^m x \, \mathrm{d}x$ alakú integrálok ($n, m \in \mathbb{N}$)

Ha $n$ páratlan $\Longrightarrow n = 2k+1$:

$$\sin^{2k+1} x \cos^m x = \sin x (\sin^2 x)^k \cos^m x$$

$$= \sin x (1 - \cos^2 x)^k \cos^m x = p(\cos x) \sin x,$$

ahol $p$ egy megfelelő polinom. Ha $P$ a $p$ egy primitív függvénye, akkor

$$\int \sin^n x \cos^m x \, \mathrm{d}x = -\int p(\cos x)(-\sin x) \, \mathrm{d}x = -P(\cos x) + C$$

Ha $m$ páratlan, akkor hasonlóan lehet eljárni.

Ha $m$ és $n$ is páros, akkor a $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ és $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ linearizáló formulákat lehet alkalmazni. Ezeket behelyettesítve kisebb hatványokat tartalmazó kifejezést kapunk.

# Helyettesítéses integrálás

# Helyettesítéses integrál

Az $\displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = F(g(x)) + C$ szabály felírható

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x \overset{g(x)=u}{=} \int f(u)\,\mathrm{d}u$$

alakban is, mert $\int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + C$. Formálisan a

$$g(x) = u, \quad g'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$$

helyettesítést hajtjuk végre.

Akkor érdemes alkalmazni, ha $f$ primitív függvényének kiszámítása nem megy egy lépésben.

P $\int \frac{e^{3x}}{2+e^{2x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(e^x)^3}{2+(e^x)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(e^x)^2}{2+(e^x)^2}e^x\,\mathrm{d}x \overset{e^x=u}{=}$

$$\int \frac{u^2}{2+u^2}\,\mathrm{d}u = \int 1-\frac{2}{2+u^2}\,\mathrm{d}u = \int 1-\frac{1}{1+(\frac{1}{\sqrt{2}}u)^2}\,\mathrm{d}u =$$

$$u - \frac{\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{2}}}{1/\sqrt{2}} + C \overset{u=e^x}{=} e^x - \sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{\sqrt{2}} + C$$

# Parciális integrálás

Á **Állítás**

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx,$$ vagy másképpen
$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx,$$ ahol $F'(x) = f(x)$.

Szorzat integrálja helyett egy másik szorzat integrálját kell kiszámítani.

B A szorzatra vonatkozó deriválási szabály:
$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
Ebből: $\int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) + C$
$\implies \int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$

Akkor célszerű használni az $f(x)g(x)$ szorzat integrálására, ha

- $g'(x)$ lényegesen egyszerűbb mint $g(x)$
- $F(x)$ nem sokkal bonyolultabb $f(x)$-nél

| Függvénytípusok | derivált | primitív függvény |
|---|---|---|
| $x^n$ | kicsit egyszerűbb (főleg ha $n = 1$) | kicsit bonyolultabb |
| $\frac{1}{x^n}$ | kicsit bonyolultabb | kicsit egyszerűbb (kivéve $n = 1$) |
| $e^x$<br>$\sin x, \cos x$<br>$\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x$ | ugyanolyan | ugyanolyan |
| $\ln x$<br>arc függvények<br>area függvények | egyszerűbb | bonyolultabb |

P $\int xe^{2x}\,\mathrm{d}x = x\frac{e^{2x}}{2} - \int 1\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$

P $\int \frac{1}{x^3}\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^{-2}}{-2}\ln x - \int \frac{1}{-2x^2}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2x^2}\ln x + \int \frac{1}{2}x^{-3}\,\mathrm{d}x =$
$-\frac{1}{2x^2}\ln x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2}\ln x - \frac{1}{4x^2} + C$

P $\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x = \int 1\cdot\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x = x\operatorname{arctg} x - \int x\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x =$
$x\operatorname{arctg} x - \int \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

m Hasonlóan számítjuk ki a többi arc, area és az ln fv. integrálját.

Néha többszöri alkalmazás szükséges:

P $$\int (x^2 - x)\cos x \,\mathrm{d}x = (x^2 - x)\sin x - \int (2x-1)\sin x \,\mathrm{d}x =$$
$$(x^2 - x)\sin x - (2x-1)(-\cos x) + \int 2(-\cos x)\,\mathrm{d}x =$$
$$(x^2 - x)\sin x + (2x-1)\cos x - 2\sin x + C$$

P $$\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x = e^x \sin x - \int e^x \cos x \,\mathrm{d}x =$$
$$e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x(-\sin x)\,\mathrm{d}x$$
$$\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x = I \ \rightsquigarrow I = e^x \sin x - e^x \cos x - I$$
$$I = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + C$$

# Összefoglalás

# Összefoglalás

- Primitív függvény és határozatlan integrál fogalma
- Alapintegrálok és integrálási szabályok
- A láncszabály megfordításának speciális formái
- Helyettesítéses integrálás
- Parciális integrálás