BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

Matematika A1a – Analízis

BMETE90AX00

Elemi függvények

H607, EIC – 2019-03-13

Wettl Ferenc

ALGEBRA TANSZÉK

Tartalom

Függvénytulajdonságok

Függvények tulajdonságai

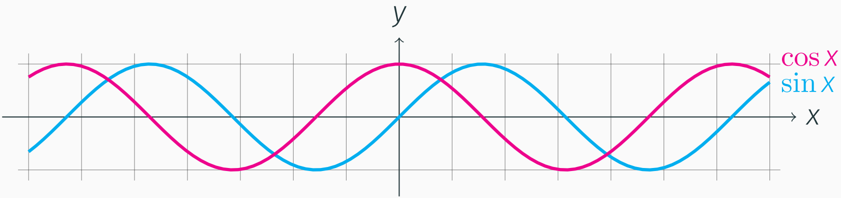
- f periodikus p periódussal, ha $f(x) = f(x + p)$ minden x értékre
- Paritás
  - f páros függvény, ha $f(-x) = f(x)$ minden x értékre - grafikonja tengelyesen szimmetrikus az y tengelyre
  - f páratlan függvény, ha $f(-x) = -f(x)$ minden x értékre - grafikonja középpontosan szimmetrikus az origóra
- Monotonitás
  - f monoton növő, ha $x < y$ esetén $f(x) \leq f(y)$
  - f szigorúan monoton növő, ha $x < y$ esetén $f(x) < f(y)$
  - f monoton csökkenő, ha $x < y$ esetén $f(x) \geq f(y)$
  - f szigorúan monoton csökkenő, ha $x < y$ esetén $f(x) > f(y)$

Trigonometrikus függvények

Trigonometrikus függvények

A sin és cos függvények

A szinusz és a koszinusz függvény



- ÉT=$\mathbb{R}$, ÉK=$[-1, 1]$ mindkét függvény esetében (x-et mindig radiánban mérjük)
- Periodikusság: $\sin x = \sin(x + 2\pi)$, $\cos x = \cos(x + 2\pi)$
- Paritás:
    - $\sin x$ páratlan: $\sin(-x) = -\sin x$
    - $\cos x$ páros: $\cos(-x) = \cos x$

Á **Állítás**

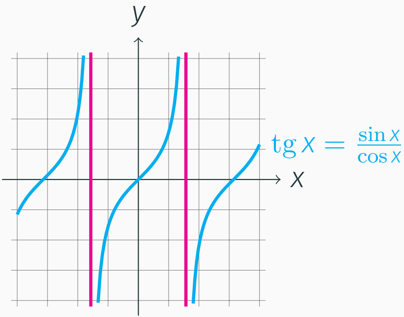
A $\sin x$ és $\cos x$ függvény minden $c \in \mathbb{R}$ pontban folytonos.

B $\lim\limits_{x\to c} \sin x = \lim\limits_{h\to 0} \sin(c+h) = \lim\limits_{h\to 0} (\sin c \cos h + \cos c \sin h) =$
$(\sin c)\cdot 1 + (\cos c)\cdot 0 = \sin c$

$\lim\limits_{x\to c} \cos x = \lim\limits_{h\to 0} \cos(c+h) = \lim\limits_{h\to 0} (\cos c \cos h - \sin c \sin h) =$
$(\cos c)\cdot 1 - (\sin c)\cdot 0 = \cos c$

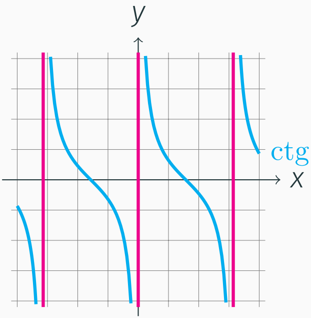
Trigonometrikus függvények

A tg és ctg függvények



- ÉT=$\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$, ÉK=$\mathbb{R}$
- Periodikusság: $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x+\pi)$
- Paritás: páratlan: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$
- Szig. mon. növekedő a $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$ interv-on $(k \in \mathbb{Z})$
- Aszimptoták: $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$-ben, $k \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{x \to (2k+1)\frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = \infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \to (2k+1)\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty$$



- ÉT=$\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, ÉK=$\mathbb{R}$
- Periodikusság: $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(x + \pi)$
- Paritás: páratlan: $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$
- Szig. mon. csökkenő a $(k\pi, (k+1)\pi)$ intervallumon ($k \in \mathbb{Z}$)
- Aszimptoták: $x = k\pi$-ben, $k \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{x \to k\pi^-} \operatorname{ctg} x = -\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \to k\pi^+} \operatorname{ctg} x = \infty$$

Polinomok

D

Definíció

A $P(x)$ valós függvényt polinomnak nevezzük, ha alkalmas $a_0, \ldots, a_n$ valós számokkal $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ alakba írható. Az a_i értékeket a polinom együtthatóinak nevezzük. Ha $a_n \neq 0$, akkor azt mondjuk, hogy a $P(x)$ polinom foka n, vagyis $\deg P = n$.

- Volt: ha P egy polinom, akkor minden $c \in \mathbb{R}$-ben folytonos
- Határértékek $\pm\infty$-ben

  Tegyük fel, hogy a $P(x)$ polinom n foka legalább 1. Ekkor

  $$\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n \left(1+\frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x}+\cdots+\frac{a_0}{a_n}\frac{1}{x^n}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n,$$

  vagyis a végtelenekben vett határérték csak a legnagyobb kitevőjű tagtól függ.

Polinomok

Maradékos osztás és gyöktényezők

Á

Állítás

Minden $f(x)$ és $g(x) \neq 0$ polinomokhoz léteznek egyértelmű $h(x)$ és $m(x)$ polinomok, hogy

$$f(x) = h(x)g(x) + m(x) \text{ és } \deg m < \deg g \text{ vagy } m = 0.$$

$h(x)$-et az f polinom g-vel vett maradékos osztása során kapott hányadosnak hívjuk,míg $m(x)$ az osztási maradék.

Kiszámítása: $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$, $g(x) = b_k x^k + \cdots + b_0$

Ekkor $h(x)$ első tagja $\frac{a_n}{b_k} x^{n-k}$ lesz,és f-et helyettesítjük az

$$f^*(x) = f(x) - \frac{a_n}{b_k} x^{n-k} g(x)$$

polinommal. Ezt az eljárást addig folytatjuk, míg az osztandó polinom foka kisebb nem lesz mint az osztó polinom foka.

P

Példa

$f(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1$, $g(x) = x^2 + 3$

$$
\begin{array}{rlrlrlrlrlrlrlrlrlr}
 & (x^3 & + & x^2 & - & 3x & + & 1) & : & (x^2 & + & 3) & = & x & + & 1 \\
- & (x^3 & & & + & 3x) & & & & & & & & & & \\
\hline
 & & & x^2 & - & 6x & + & 1 & & & & & & & & \\
 & & - & (x^2 & & & + & 3) & & & & & & & & \\
\cline{3-8}
 & & & & - & 6x & - & 2 & & & & & & & &
\end{array}
$$

Tehát:

$$x^3 + x^2 - 3x + 1 = (x+1)(x^2+3) + (-6x-2),$$

illetve

$$\frac{x^3 + x^2 - 3x + 1}{x^2 + 3} = x + 1 + \frac{-6x-2}{x^2+3}.$$

Polinomok gyöktényezői

T **Tétel**

Ha $f(x)$ egy polinom és c gyöke $f(x)$-nek (azaz $f(c) = 0$), akkor létezik egy $h(x)$ polinom, hogy $f(x) = (x - c)h(x)$.

B Maradékos osztás $\Longrightarrow$ léteznek $h(x)$, $m(x)$ polinomok, hogy

$$f(x) = h(x)(x - c) + m(x),$$

ahol $\deg m(x) < \deg(x - c) = 1$ vagy $m = 0$. Ekkor viszont $m(x)$ csak egy m konstans lehet. Behelyettesítve c-t:

$$0 = f(c) = h(c)(c - c) + m = m,$$

vagyis valóban $f(x) = (x - c)h(x)$.

Polinomok

Horner-módszer és racionális gyökteszt

Horner-módszer

$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ maradékos osztása $(x - c)$-vel
A maradék éppen $m = f(c)$.

	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_1	a_0
	$\downarrow$	$\downarrow +$		$\downarrow +$	$\downarrow +$
c	$b_{n-1} = a_n$	$\rightarrow \cdot c \quad b_{n-2} = a_{n-1} + c \cdot a_n$	$\cdots$	$\rightarrow \cdot c \quad b_0 = a_1 + c \cdot *$	$\rightarrow \cdot c \quad f(c) = a_0 + c \cdot b_0$

Ekkor $f(x) = (x - c)(b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0) + f(c)$, hiszen beszorozva, és összehasonlítva x^i együtthatóját a két oldalon

$$a_i = b_{i-1} - c \cdot b_i \implies b_{i-1} = a_i + c \cdot b_i,$$

valamint x^0 együtthatóját

$$a_0 = -c \cdot b_0 + f(c) \implies f(c) = a_0 + c \cdot b_0.$$

P

Példa

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ és $c = 2$.

$f(2) = 0 \Longrightarrow$ kiemelhető belőle $(x - 2)$

Horner-módszerrel:

	1	−3	0	4
$c = 2$	1	−1	−2	0

Ennek megfelelően:

$$x^3 - 3x^2 + 4 = (x - 2)(x^2 - x - 2).$$

Racionális gyökteszt

Á **Állítás**

Legyen $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$ egy egész együtthatós polinom (vagyis $a_i \in \mathbb{Z}$ minden i-re), és tegyük fel, hogy a $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tovább már nem egyszerűsíthető racionális szám gyöke f-nek. Ekkor p osztója a_0-nak és q osztója a_n-nek.

B $(p, q) = 1$ (relatív prímek, nincs közös osztójuk)

$$0 = f\left(\frac{p}{q}\right) = a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 \quad / \cdot q^n$$

$$0 = a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n$$

B [folytatás]

$$0 = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n$$

$p \mid 0$ és $p \mid a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} \Longrightarrow p \mid a_0 q^n$
$q \mid 0$ és $q \mid a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n \Longrightarrow q \mid a_n p^n$
Mivel $(p, q) = 1$, ezért szükségképpen $p \mid a_0$ és $q \mid a_n$.

P **Példa**

Van-e racionális gyöke az $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ polinomnak?

Ha $\frac{p}{q}$ gyök ($(p, q) = 1$), akkor $p \mid 4$ és $q \mid 1$

$p = \pm 1, \pm 2, \pm 4$ és $q = \pm 1$, vagyis a lehetséges racionális gyökök $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Ezeket kipróbálva azt kapjuk, hogy 2 és -1 a racionális gyökök.

Polinomok

Racionális törtfüggvények

Racionális törtfüggvények

D

Definíció

$f(x)$-et racionális törtfüggvénynek nevezzük, ha alkalmas $p(x)$ és $q(x)$ polinomokkal $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$.

- Mindenhol folytonos, ahol értelmezve van (ahol a nevező nem 0).
- Ha $\deg p \geq \deg q$, akkor léteznek $h(x)$ és $m(x)$ polinomok, hogy

$$p(x) = h(x)q(x) + m(x) \text{ és } \deg m < \deg q.$$

Ekkor:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = h(x) + \frac{m(x)}{q(x)},$$

ahol a második tag már egy olyan racionális törtfüggvény, ahol a számláló foka kisebb mint a nevező foka.

Az exponenciális függvény

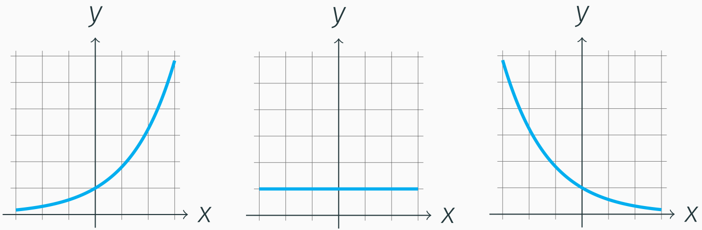
Á **Állítás**

Ha $a > 0$ valós szám, akkor egyértelműen létezik egy mindenhol folytonos valós f függvény, hogy minden racionális r pontra $f(r) = a^r$.

D **Definíció**

A fenti állítás által garantált f függvényt a alapú exponenciális függvénynek nevezzük, és $f(x) = a^x$-szel jelöljük.

B (Csak egyértelműség, a létezést később) TFH a feltételeket 2 folytonos függvény is teljesíti: f_1 és f_2. Ekkor a $g = f_1 - f_2$ függvényre folytonos és minden racionális r helyen $g(r) = 0$. A folytonosság miatt $\forall c \, \exists \lim_{x \to c} g(x)$, és $= g(c)$. De $\forall (c - \delta, c + \delta)$ intervallumban $\exists r \in \mathbb{Q}$ rac.szám $\rightsquigarrow g(r) = 0 \rightsquigarrow$ a határérték csak 0 lehet $\rightsquigarrow \forall c \, g(c) = 0 \rightsquigarrow f_1 = f_2$.



$a > 1$ $\qquad$ $a = 1$ $\qquad$ $0 < a < 1$

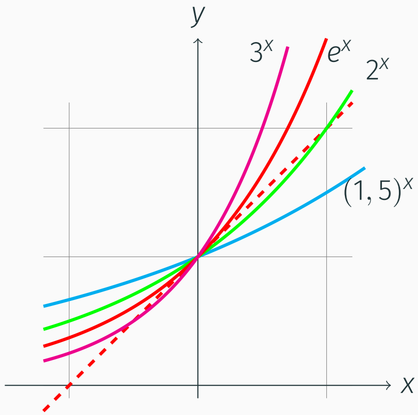
- Ha $a > 1$, akkor a^x szig. mon. növekedő $\mathbb{R}$-en; $-\infty$-ben 0-ba, ∞-ben ∞-be tart.
- Ha $0 < a < 1$, akkor a^x szig. mon. csökkenő $\mathbb{R}$-en; $-\infty$-ben ∞-be, ∞-ben 0-ba tart.
- $a^x > 0$ minden $a > 0$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén
- Hatványazonosságok:
  - $a^x a^y = a^{x+y}$
  - $(a^x)^y = a^{xy}$
  - $(ab)^x = a^x b^x$

D

Definíció

Kitüntetett szerepe van annak a hatványalapnak, amikor az a^x grafikonjának az érintője a 0-ban 45°-os szögben áll. Ennek az a alapnak a neve Euler-szám, és e-vel jelöljük.

Az e értéke közelítőleg $2.718281828459045\ldots$.



Hiperbolikus függvények

Hiperbolikus függvények

Az sh és ch függvények

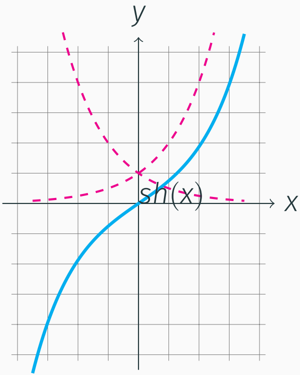
Az sh és ch függvények

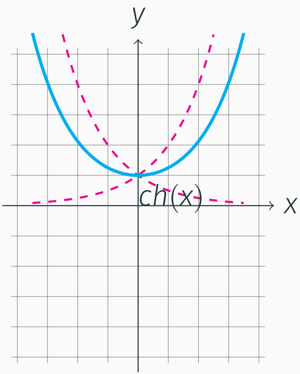
D **Definíció**

$$\text{Szinusz hiperbolikusz: } \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\text{Koszinusz hiperbolikusz: } \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- Folytonosak az egész $\mathbb{R}$-en.
- Paritás:
  - $\operatorname{sh} x$ páratlan: $\operatorname{sh}(-x) = \frac{e^{-x}-e^x}{2} = -\operatorname{sh} x$
  - $\operatorname{ch} x$ páros: $\operatorname{ch}(-x) = \frac{e^{-x}+e^x}{2} = \operatorname{ch} x$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{sh} x = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{2} = -\infty$,
  $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sh} x = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \infty \rightsquigarrow$ ÉK$= \mathbb{R}$
- $\operatorname{ch} x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \frac{(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}})^2+2}{2} \geq 1$, $\operatorname{ch} 0 = 1$,
  $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \operatorname{ch} x = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \infty \rightsquigarrow$ ÉK$= [1, \infty)$





Monotonitás:

- $\mathrm{sh}\, x$ szig. mon. növő $\mathbb{R}$-en
- $\mathrm{ch}\, x$ szig. mon. csökkenő $(-\infty, 0]$-n
  és szig. mon. növő $[0, \infty)$-en

Á

Hiperbolikus azonosságok

1. $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
2. $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
3. $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$ $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

B Csak az 1.-t

$$\begin{aligned}
&\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x \\
&\quad = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&\quad = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} \\
&\quad = \frac{4}{4} = 1
\end{aligned}$$

Hiperbolikus függvények

A th és cth függvények

A th és cth függvények

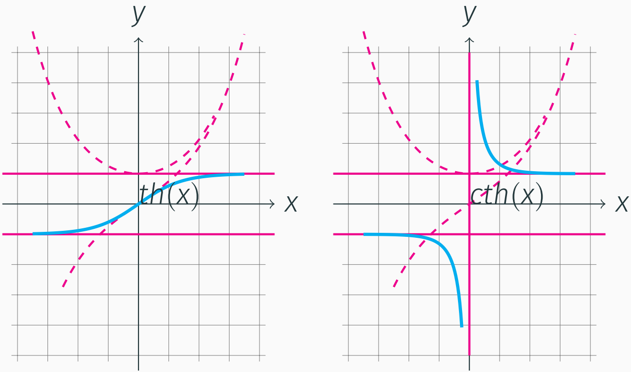
D

Definíció

Tangens hiperbolikusz: $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$

Kotangens hiperbolikusz: $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$

- ÉT: $\mathcal{D}(\operatorname{th} x) = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(\operatorname{cth} x) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- Mindkét függvény folytonos az értelmezési tartománya minden pontjában.
- Mindkét függvény páratlan: $\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth} x$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{th} x = -1$, $\lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{th} x = 1$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{cth} x = -1$, $\lim\limits_{x \to 0-} \operatorname{cth} x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0+} \operatorname{cth} x = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{cth} x = 1$



Monotonitás:

- $\operatorname{th} x$ szig. mon. növő $\mathbb{R}$-en
- $\operatorname{cth} x$ szig. mon. csökkenő $(-\infty, 0)$-n és $(0, \infty)$-en

$\operatorname{th} x$ értékkészlete $(-1, 1)$, $\operatorname{cth} x$ értékkészlete $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Függvény inverze

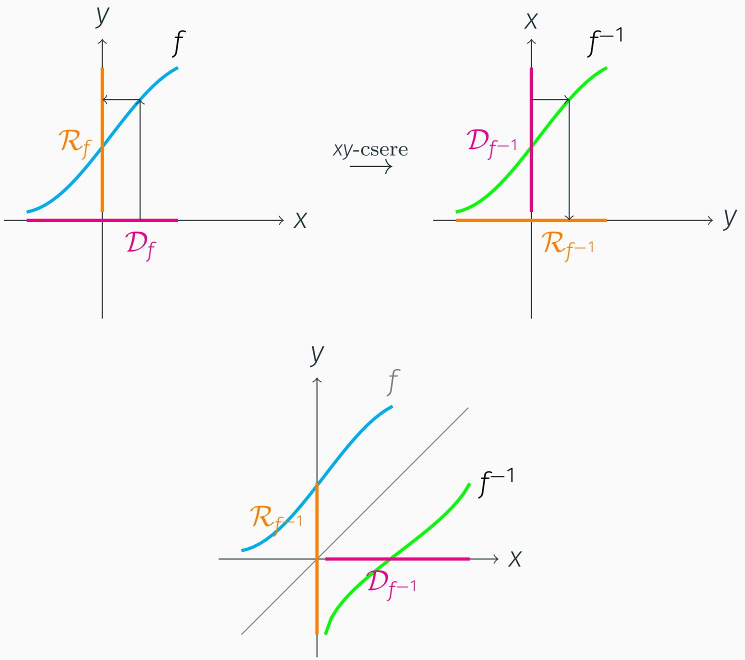
D Egy függvény injektív (egy-egyértelmű, kölcsönösen egyértelmű, invertálható), ha az értelmezési tartomány különböző elemeihez az értékkészlet különböző elemeit rendeli, azaz

ha $a, b \in \mathcal{D}_f$ és $a \neq b$, akkor $f(a) \neq f(b)$.

D ha $H \subseteq \mathcal{D}_f$, akkor f leszűkítése/megszorítása H-ra az az $f|_H$-val jelölt függvény, melynek értelmezési tartománya H, és $x \in H$ esetén $f|_H(x) = f(x)$.

P A $\sin$, $\cos$, tg, ctg függvények nem injektívek, de a $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$, $\cos|_{[0,\pi]}$, $\mathrm{tg}|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$, $\mathrm{ctg}|_{(0,\pi)}$ függvények igen!

m Horizontális teszt: f pontosan akkor injektív, ha grafikonja egyetlen vízszintes egyenest sem metsz egynél több pontban.


y
f
$\mathcal{R}_f$
x
$\mathcal{D}_f$
xy-csere
x
f^{-1}
$\mathcal{D}_{f^{-1}}$
y
$\mathcal{R}_{f^{-1}}$
y
f
$\mathcal{R}_{f^{-1}}$
f^{-1}
x
$\mathcal{D}_{f^{-1}}$

D Az injektív f függvény inverzén az f^{-1}-gyel jelölt függvényt értjük, melyre

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

$\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$, $\mathcal{R}_{f^{-1}} = \mathcal{D}_f$.

Á $f^{-1} \circ f$ és $f \circ f^{-1}$ identikus függvények:

$f^{-1} \circ f : \mathcal{D}_f \to \mathcal{D}_f = x \mapsto x$, és $f \circ f^{-1} : \mathcal{D}_{f^{-1}} \to \mathcal{D}_{f^{-1}} = y \mapsto y$

m f^{-1} nem tévesztendő össze f reciprokával ($\frac{1}{f}$-fel)! Függvény reciprokára ne használjuk a -1 kitevőt!

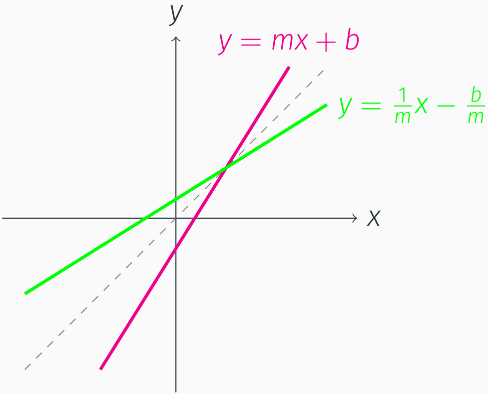
Analógia: legyen $a \neq 0$ valós szám, és legyen f injektív függvény.

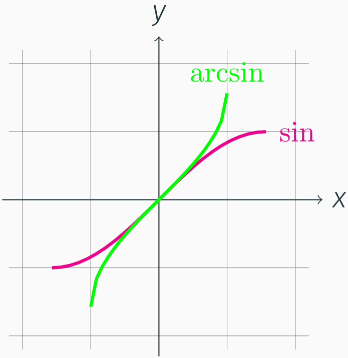
$\cdot$ (számok szorzása)	$\leftrightarrow$	$\circ$ (függvények kompozíciója)
1	$\leftrightarrow$	id
$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$	$\leftrightarrow$	$f \circ \mathrm{id} = \mathrm{id} \circ f = f$
szám reciproka	$\leftrightarrow$	függvény inverze
$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$	$\leftrightarrow$	$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$

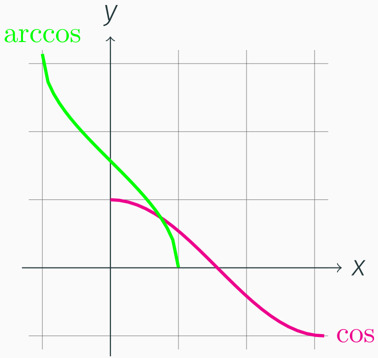
P Az $x \mapsto y = x^2$ injektív, ha $x \geqslant 0$. Inverze az x és y „felcserélése” után: $x = y^2$, azaz $y = \sqrt{x}$.

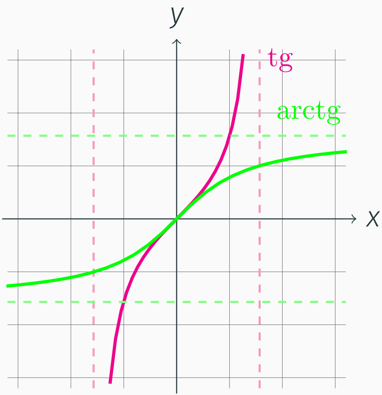
P Az e^x inverze az $\ln x$ függvény.

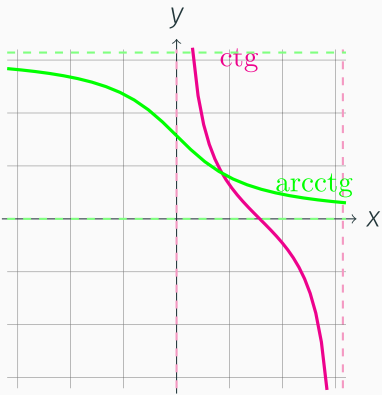
P Az $x \mapsto y = mx + b$ $(m \neq 0)$ inverze az $x = my + b$ összefüggésből: $y = \frac{1}{m}x - \frac{b}{m}$.




y
arcsin
sin
X


y
arccos
X
cos


y
tg
arctg
X


y
ctg
arcctg
X

D A trigonometrikus függvények nem injektívek, de megszorítva egy megfelelő intervallumra igen (zárójelben az amerikai jelölések):

$$\arcsin x = \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1} \qquad \text{(sin asin)}$$

$$\arccos x = \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1} \qquad \text{(cos acos)}$$

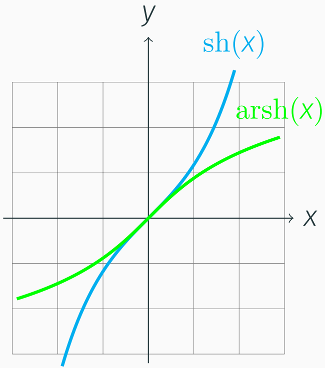
$$\operatorname{arctg} x = \left(\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right)^{-1} \qquad \text{(tan atan)}$$

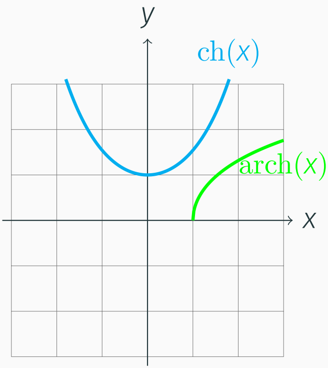
$$\operatorname{arcctg} x = \left(\operatorname{ctg}|_{(0,\pi)}\right)^{-1} \qquad \text{(cot acot)}$$

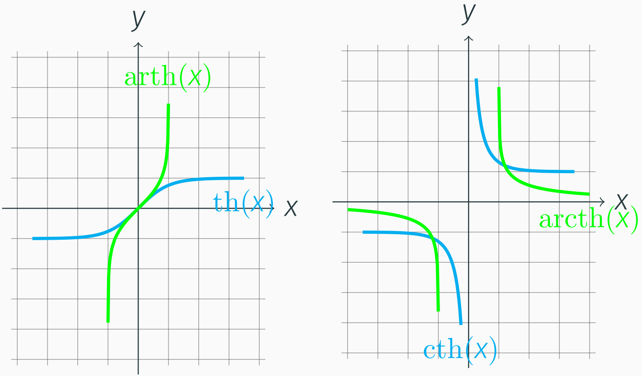
Á Az arkuszfüggvények értelmezési tartománya és értékkészlete:

f	arcsin	arccos	arctg	arcctg
$\mathcal{D}_f$	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$(-\infty,\infty)$	$(-\infty,\infty)$
$\mathcal{R}_f$	$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$	$[0,\pi]$	$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$	$(0,\pi)$

Hiperbolás függvények inverzei






y
arth(x)
th(x)
x
y
x
arcth(x)
cth(x)

Összefoglalás

Összefoglalás

- Elemi függvények ($\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, a^x, e^x, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$) és tulajdonságaik (ÉT, ÉK, folytonosság, paritás, monotonitás, határértékek)
- Polinomok
    - Polinomok maradékos osztása
    - Polinomok gyöktényezői, Horner-módszer
    - Racionális gyökteszt
    - Racionális törtfüggvények
- Függvények inverzei (arcsin, arccos, arctg, arcctg, arsh, arch, arth, arcth)