BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

Matematika A1a – Analízis

BMETE90AX00

Folytonosság

H607, EIC – 2019-03-07

Wettl Ferenc

ALGEBRA TANSZÉK

Tartalom

A folytonosság fogalma

A folytonosság fogalma

Pontbeli folytonosság

D

Pontbeli folytonosság

A valós f függvény $\mathcal{D}(f)$ értelmezési tartományának egy c pontjában folytonos, ha

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathcal{D}(f)\ \ [\,|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon\,]\,.$$

D

Szakadási hely

c az f szakadási pontja/helye, ha f a c-ben nem folytonos (de azért a definíció szerint ott értelmezve van).

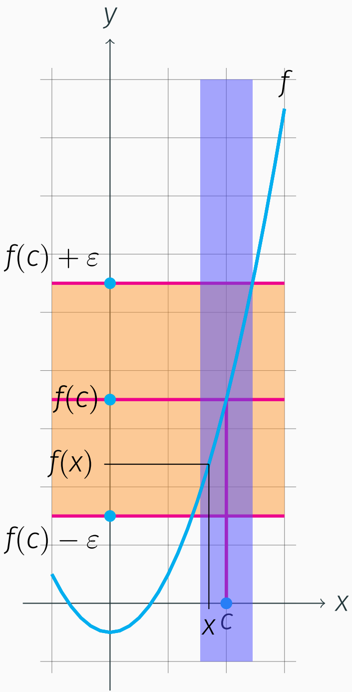
D

Megszüntethető, ugrás, lényeges szakadási hely

c megszüntethető szakadási helye/pontja f-nek, ha $\lim\limits_{c} f$ létezik, de $\lim\limits_{c} f \neq f(c)$.

c ugráshelye f-nek, ha $\lim\limits_{c-} f$ és $\lim\limits_{c+} f$ határértékek végesek, de különbözők.

A többi szakadási hely neve: lényeges szakadási hely.


y
f
f(c) + ε
f(c)
f(x)
f(c) − ε
x
x
c

Különböző terminológiai elnevezések használatosak, mi nem fogjuk szakadási helynek nevezni azt, ahol f nincs értelmezve.

D

Hézagpont

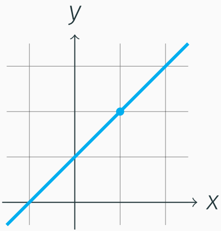
c hézagpontja f-nek, ha létezik $\lim\limits_{c} f$, de f nincs értelmezve c-ben. (Pl. $\frac{x^2-1}{x-1}$-nek hézagpontja van az $x = 1$ pontban.)

D

Pólus

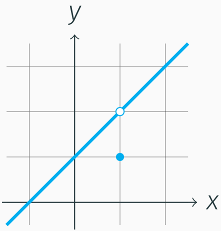
c pólusa f-nek, ha $\lim\limits_{c^+} f = \pm\infty$ és $\lim\limits_{c^-} f = \pm\infty$. (Pl. $\frac{x^2-1}{x-2}$-nek pólusa van az $x = 2$ pontban.)

$$x \mapsto x+1$$



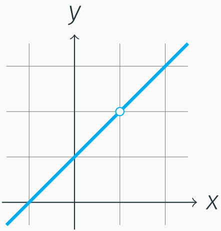
folytonos

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{ha } x \neq 1 \\ 1 & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$



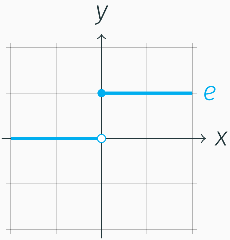
megszüntethető szakadás

$$x \mapsto \frac{x^2-1}{x-1}$$

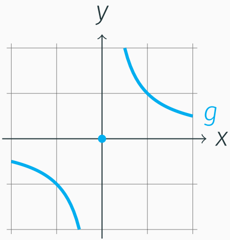


hézagpont (szingularitás)

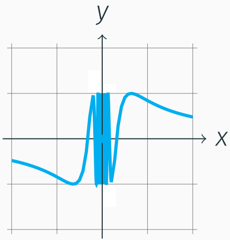
$$e : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \\ 1 & \text{ha } x \geqslant 0 \end{cases} \qquad x \mapsto \begin{cases} 1/x & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases} \qquad x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$



ugráshely



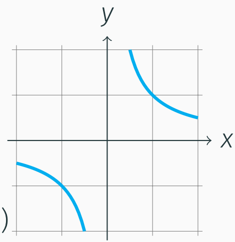
pólus
(szakadás)



lényeges
szakadás

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

pólus
(szingularitás)



P

Dirichlet-függvény

Az

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

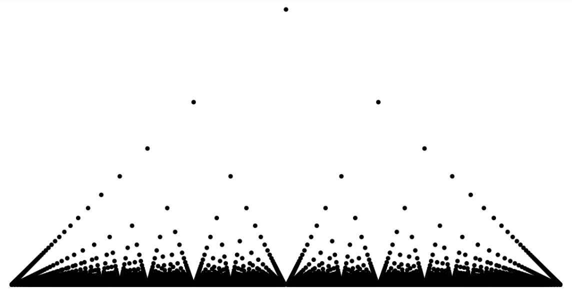
függvénynek $\mathbb{R}$ minden pontja szakadási pontja.

P

Thomae-, Riemann-, popcorn, 'Stars over Babylon' függvény

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{ha } x \in \mathbb{Q}, x = \frac{p}{q} \text{ egyszerűsített alak, } q > 0, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

folytonos minden irracionális pontban, és megszüntethető szakadása van a racionális pontokban.



Thomae-függvény $[0, 1]$ intervallum fölötti része

Ábra forrása: Wikipedia `https://en.wikipedia.org/wiki/Thomae%27s_function`

A folytonosság fogalma

Pontbeli féloldali folytonosság

D

Jobb oldali folytonosság

A valós f függvény értelmezési tartományának egy c pontjában jobbról folytonos, ha

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x\ \left[\, 0 \leqslant x - c < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon \,\right].$$

D

Bal oldali folytonosság

A valós f függvény értelmezési tartományának egy c pontjában balról folytonos, ha

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x\ \left[\, 0 \leqslant c - x < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon \,\right].$$

T **Folytonosság elégséges feltétele**

Ha létezik $\lim\limits_{c} f$, és $\lim\limits_{c} f = f(c)$, akkor f folytonos c-ben.

Á Ha létezik $\lim\limits_{c+} f$, és $\lim\limits_{c+} f = f(c)$, akkor f jobbról folytonos c-ben.

Á Ha létezik $\lim\limits_{c-} f$, és $\lim\limits_{c-} f = f(c)$, akkor f balról folytonos c-ben.

P A valószínűségi változók eloszlásfüggvénye balról folytonos, ha a

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X < x)$$

képlettel definiáljuk.

A folytonosság fogalma

Folytonosság

D **Definíció**

f folytonos, ha értelmezési tartományának minden pontjában folytonos.

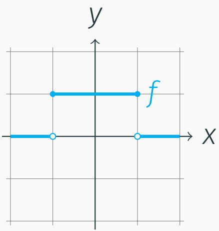
Á **Állítás**

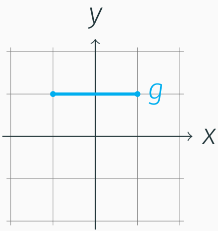
Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor folytonos, ha

- az $[a, b]$ intervallum minden belső c pontjában $\lim_{c} f = f(c)$,
- az a végpontban $\lim_{a+} f = f(a)$,
- a b végpontban $\lim_{b-} f = f(b)$.

D **Definíció**

Az f függvény folytonos az I itervallumon, ha az I intervallumra megszorított $f|_I$ függvény folytonos.





f nem folytonos -1-ben és 1-ben, g folytonos e pontokban, így az $f|_{[-1,1]}$ megszorítás is.

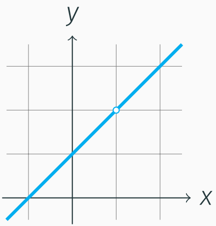
Á **Állítás**

Minden polinom és minden racionális törtfüggvény (két polinom hányadosa) folytonos függvény.

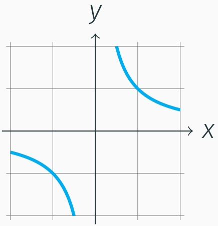
P **Példa**

$x^5 - 4x^2 + x - 100$, $\frac{1}{x}$, $\frac{x^2-1}{x-1}$ folytonos függvények! (Mert értelmezési tartományuk minden pontjában folytonosak)

$x \mapsto \frac{x^2-1}{x-1}$



$x \mapsto \frac{1}{x}$



T

Tétel

Ha g folytonos a c pontban, f pedig az $g(c)$ pontban, akkor $f \circ g$ folytonos c-ben.

$$\begin{tikzcd} f(g(c)) = (f \circ g)(c) & g(c) \arrow[l, "\boxed{f}"'] & c \arrow[l, "\boxed{g}"'] \arrow[ll, bend left, "\boxed{f \circ g}"] \end{tikzcd}$$

P **Példa**

$x \mapsto |x|$, $x \mapsto \dfrac{x^3+1}{x^4-4}$ folytonos függvények $\rightsquigarrow$ $x \mapsto \left|\dfrac{x^3+1}{x^4-4}\right|$ folytonos

P **Példa**

$x \mapsto \dfrac{x^3+1}{x^4-4}$, $x \mapsto |x|$ folytonos függvények $\rightsquigarrow$ $x \mapsto \dfrac{|x|^3+1}{x^4-4}$ folytonos

P **Példa**

$x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto 4-x^2$ folytonos függvények $\rightsquigarrow$ $x \mapsto \sqrt{4-x^2}$ folytonos

A folytonosság fogalma

Folytonos kiterjesztés

D **Definíció**

Ha f a c helyen nincs értelmezve, de létezik az $L = \lim_c f$ határérték, akkor az

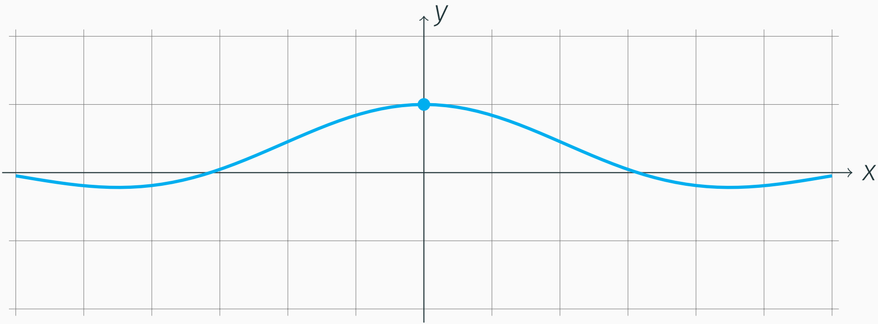
$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ha } x \neq c, \\ L & \text{ha } x = c \end{cases}$$

függvényt az f c-re való kiterjesztésének nevezzük.

P

Példa

A $\dfrac{\sin x}{x}$ függvény folytonosan kiterjeszthető az egész számegyenesre.



$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{ha } x \neq 0, \\ 1 & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Intervallumon való folytonosság

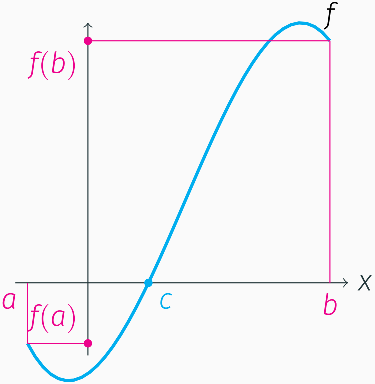
Intervallumon való folytonosság

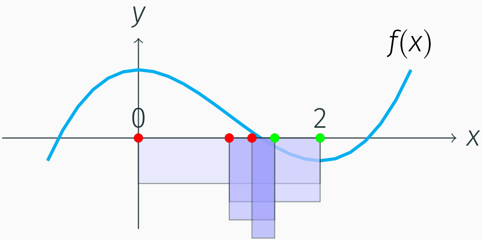
Bolzano tétel

T

Bolzano-tétel

Ha f folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon és $f(a)$ és $f(b)$ ellentétes előjelűek ($f(a) \cdot f(b) < 0$), akkor f-nek van zérushelye az intervallum belsejében, vagyis
$\exists\, c \in (a, b) : \; f(c) = 0.$





B

$[a,b] = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$ zárt intervallumok: I_{n+1} az I_n-nek az a fele, amelyiknek a két végpontján f különböző előjelű (ha f valamelyik osztópontban 0, akkor leállunk).

Cantor-axióma: Egymásba skatulyázott nem üres zárt intervallumok metszete nem üres $\mathbb{R}$-ben.

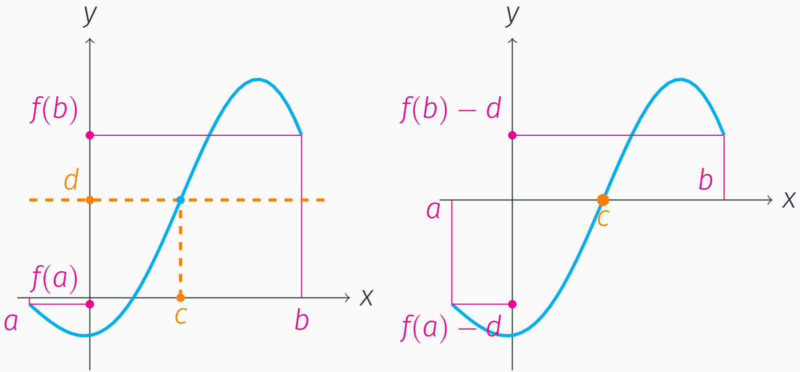
Legyen $c \in I_0 \cap I_1 \cap I_2 \cap \ldots = J$.$I_n$ hossza $\frac{b-a}{2^n}$, ez akármilyen kis $\varepsilon > 0$-nál kisebb, ha n elég nagy. $\rightsquigarrow J = \{c\}$.

$f(c) = 0$:ha $f(c) = K > 0$ lenne, akkor f folytonossága miatt valamely $\varepsilon > 0$-ra $\forall x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$-re $f(x) \geq \frac{K}{2} > 0$. De valamelyik I_n intervallum beleesik a c-nek ebbe a környezetébe, és annak a végpontjain f különböző előjelű. $\lightning$

T **Bolzano-Darboux-tétel**

Ha f folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon, akkor minden $f(a)$ és $f(b)$ közé eső d-hez létezik olyan c, hogy $f(c) = d$.

B Alkalmazzuk a Bolzano-tételt a $g(x) = f(x) - d$ függvényre.



Intervallumon való folytonosság

Weierstrass-tétel

D

Szélsőértékek

Legyen f egy valós függvény és $A \subseteq \mathcal{D}(f)$.

- f-nek az A-ra nézve minimuma van a $c \in A$ pontban, ha minden $x \in A$ esetén $f(c) \leq f(x)$.
- f-nek az A-ra nézve maximuma van a $c \in A$ pontban, ha minden $x \in A$ esetén $f(c) \geq f(x)$.

T

Weierstrass-tétel

Ha f az $[a, b]$ zárt intervallumon folytonos függvény, akkor van maximuma és minimuma, vagyis $\exists\, c_1, c_2 \in [a, b]$, hogy minden $x \in [a, b]$ esetén $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$.

m $I \subseteq \mathbb{R}$ pontosan akkor intervallum, ha $a < c < b$, $a, b \in I$-ből következik, hogy $c \in I$.

T **Következmény**

Intervallum képe folytonos függvénynél intervallum, korlátos zárt intervallum képe pedig korlátos zárt intervallum.

Összefoglalás

Összefoglalás

- Pontbeli folytonosság
- Szakadási helyek, hézagpont, folytonos kiterjesztés
- Pontbeli egyoldali folytonosság
- Folytonos függvények, egyoldali folytonos függvények
- Korlátos zárt intervallumon folytonos függvények (Bolzano-tétel, Bolzano-Darboux-tétel, szélsőértékek definíciója, Weierstrass-tétel)