



Matematika A1a – Analízis

BMETE90AX00



Határérték

H607, EIC – 2019-02-27



Wetttl Ferenc

ALGEBRA TANSZÉK

A határérték definíciója

A határérték intuitív fogalma

A határérték precíz definíciója

(Véges) határérték a végtelenben

Határértékek kiszámítása

Határérték kiszámítására vonatkozó tételek

A szendvicstétel – rendőrelv – csendőrelv

Kiterjesztések

Jobb és bal oldali határértékek

A végtelen, mint határérték

Aszimptoták, domináns tagok

Összefoglalás

A határérték definíciója

A határérték definíciója

A határérték intuitív fogalma

A valós függvény fogalma

D Egyváltozós valós függvény

f -et valós függvénynek nevezzük, amennyiben a valós számok egy részhalmazához (értelmezési tartomány - $\mathcal{D}(f)$) rendel valós számokat oly módon, hogy az értelmezési tartomány minden eleméhez pontosan egy értéket rendel. Az értelmezési tartomány egy x értékéhez rendelt értéket $f(x)$ jelöli.

D Valós függvény grafikonja

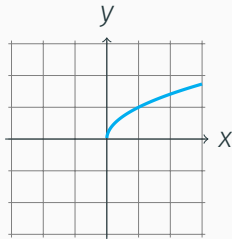
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathcal{D}(f), y = f(x)\}$$

$\mathbb{R}^2$ egy részhalmaza akkor és csak akkor grafikonja egy függvénynek, ha minden függőleges egyenes legfeljebb egy pontban metszi.

Néhány példa

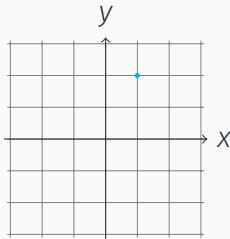
$$f_1(x) = \sqrt{x}$$

függvény



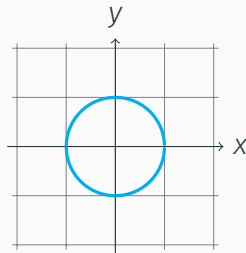
$$f_2: \mathcal{D}(f_2) = \{1\} \quad f_2(1) = 2$$

függvény



$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

nem grafikonja
függvénynek



- függvény: f_3 minden irracionális x értékhez 1-et rendel.

A határérték intuitív fogalma

- Tegyük fel, hogy az $f(x)$ függvény értelmezve van egy nyílt intervallumon, amelynek x_0 eleme, *kivéve esetleg magát az x_0 helyet*. Ha az $f(x)$ függvényértékek **tetszőlegesen közel** kerülhetnek az L számhoz, amennyiben az x értékek **elégé megközelítik** x_0 -t, de vele nem válnak egyenlővé, akkor azt mondjuk, hogy f az L számhoz tart miközben x tart x_0 -hoz; ezt úgy fejezzük ki, hogy f **határértéke** az x_0 pontban L . Jelölése:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \text{ vagy } \lim_{x_0} f = L$$

- Az előző f_3 példa azt mutatja, hogy olyan függvénynek is értelmezhető a határértéke, amely nem egy intervallumon, csak egy x_0 -ban „torlódó” pontthalmazon van értelmezve.

P Határérték és függvényérték

Vessük össze az alábbi három függvény viselkedését az $x = 1$ pont környezetében.

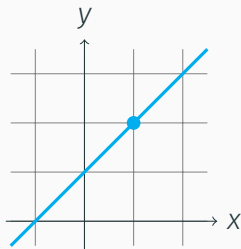
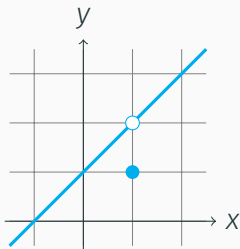
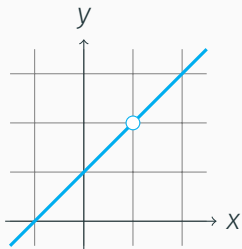
$$(a) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$(b) g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

$$(c) h(x) = x + 1$$

m $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 2 = h(1)$. $g(1) = 1 \neq 2$,
 f pedig nincs is értelmezve 1-ben.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{ha } x \neq 1 \\ 1 & \text{ha } x = 1 \end{cases} \quad f(x) = x + 1$$



Amikor nem létezik határérték

P

Példa

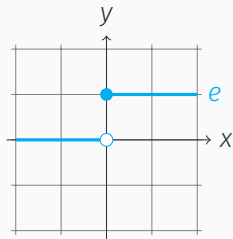
Hogyan viselkednek az alábbi függvények, az $x = 0$ helyen?

$$(a) \ e(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{ez az egységugrás függvény})$$

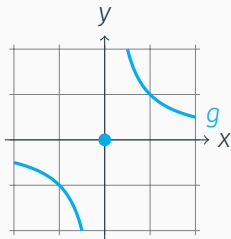
$$(b) \ g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$(c) \ f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

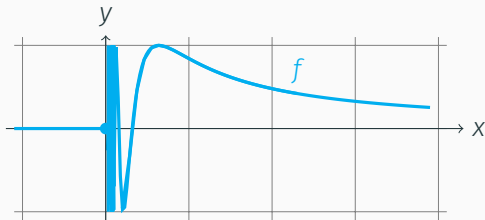
$$e(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \\ 1 & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$



$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}$$



A határtérték számítógépes becslése

P A határtérték becslése korlátozott pontosság esetén

Határozzuk meg a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2}$ határértéket 6 tizedesjegy pontossággal számoló számológéppel.

m Vajon 0,05 vagy 0 vagy egy harmadik szám a határérték? ($0,05 = 1/20$).

x	f(x)	
±1	0,049876	}
±0,5	0,049969	
±0,1	0,049999	
±0,01	0,050000	
±0,0005	0,000000	}
±0,0001	0,000000	
±0,00001	0,000000	
±0,0000001	0,000000	

A határérték 0,05?

A határérték 0?

A határérték definíciója

A határérték precíz definíciója

D Függvény határértéke

Tegyük fel, hogy az f függvény értelmezve van valamely, az x_0 -t tartalmazó nyílt intervallum – esetleg x_0 kivételével – minden pontjában. Azt mondjuk, hogy $f(x)$ tart L -hez, amint x tart x_0 -hoz (f határértéke az x_0 helyen L), szimbolikusan

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x_0} f = L,$$

ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden x esetén, ha $0 < |x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Formulával:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x [0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon].$$

A definíció alkalmazása a legegyszerűbb függvényekre

- P Ha f az **identikus leképezés** (minden x -re $f(x) = x$), akkor tetszőleges c esetén

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} x = c.$$

Adott $\varepsilon > 0$ -hoz $\delta = \varepsilon$ megfelelő, de jó bármely $\delta < \varepsilon$ is.

- P Ha $f(x) = |x|$ akkor tetszőleges c esetén

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} |x| = |c|.$$

Adott $\varepsilon > 0$ -hoz $\delta = \varepsilon$ megfelelő, de jó bármely $\delta < \varepsilon$ is.

- P Ha f **konstans függvény**, azaz minden x -re $f(x) = k$ valamely k számra, akkor tetszőleges c esetén

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} k = k.$$

Adott $\varepsilon > 0$ -hoz $\delta = 1$ megfelelő (vagy bármilyen pozitív δ).

- P $\lim_{x \rightarrow 3} x = 3$, $\lim_{x \rightarrow -3} |x| = 3$, $\lim_{x \rightarrow -7} 4 = \lim_{x \rightarrow 2} 4 = 4$.

Ha nem létezik határérték

K Miért nem létezik egy f függvénynek határértéke egy c pontban?

M Tagadjuk a definícióbeli ítéletet:

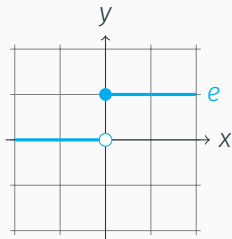
$$\exists L \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x [0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon]$$

- tagadása

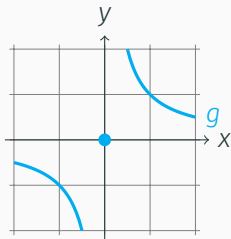
$$\forall L \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x [0 < |x - c| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \varepsilon].$$

P Keressünk a következő függvényekhez olyan ε számot, ami igazolja, hogy a függvénynek 0-ban nincs határértéke.

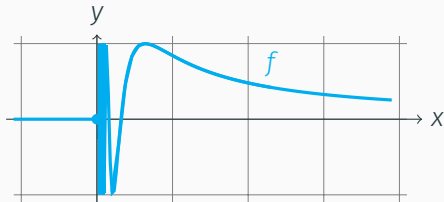
$$e(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \\ 1 & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$



$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}$$



e esetén bármely $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$, f esetén bármely $0 < \varepsilon \leq 1$, g esetén bármely $0 < \varepsilon$ igazolja a határérték nemlétezését.

Adott f, x_0, L, ε -hoz tartozó δ kiszámítása

m Azt a δ -t keressük, amelyre tetszőleges x esetén

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

- (1) Az $|f(x) - L| < \varepsilon$ egyenlőtlenség megoldásával keressünk egy (a, b) nyílt intervallumot, amelynek minden x_0 -tól különböző elemére teljesül az egyenlőtlenség.
- (2) Adjunk meg egy $\delta > 0$ számot, amelyre teljesül, hogy az x_0 középpontú $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ nyílt intervallum az (a, b) intervallum belsejébe esik.

Példa δ kiszámítására

P

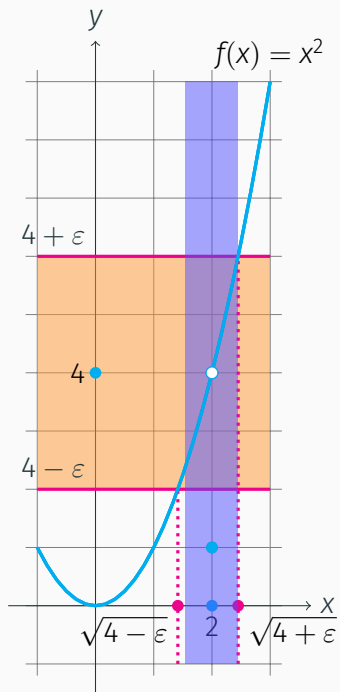
Példa

Igazoljuk, hogy $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$, amennyiben

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$$

M Bizonyítandó: bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$, hogy minden x -re

$$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 4| < \varepsilon.$$



Példa δ kiszámítására (folytatás)

- (1) Keresünk egy nyílt intervallumot, amelynek minden x_0 -tól különböző elemére teljesül az $|f(x) - 4| < \varepsilon$ egyenlőtlenség.

$$|x^2 - 4| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < x^2 - 4 < \varepsilon$$

$$4 - \varepsilon < x^2 < 4 + \varepsilon$$

$$\sqrt{4 - \varepsilon} < |x| < \sqrt{4 + \varepsilon}$$

$$\sqrt{4 - \varepsilon} < x < \sqrt{4 + \varepsilon}$$

(Gyökvonásnál feltettük, hogy $\varepsilon < 4$.) Tehát ha

$x \in (\sqrt{4 - \varepsilon}, \sqrt{4 + \varepsilon})$ és $x \neq 2$, akkor $|f(x) - 4| < \varepsilon$.

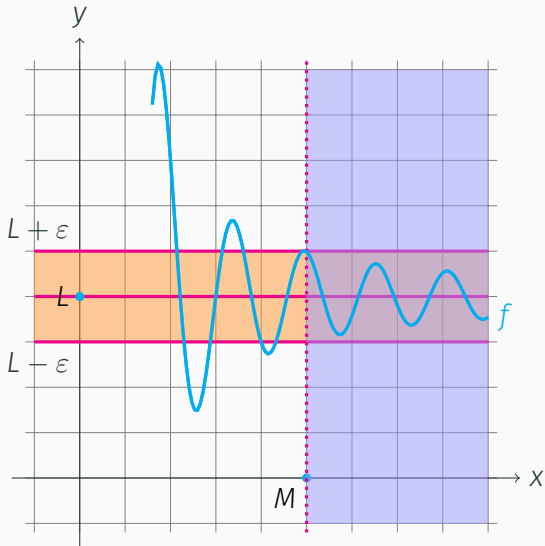
- (2) Adjunk meg egy $\delta > 0$ számot, melyre

$$(2 - \delta, 2 + \delta) \subseteq (\sqrt{4 - \varepsilon}, \sqrt{4 + \varepsilon}).$$

$$\delta = \min\{2 - \sqrt{4 - \varepsilon}, \sqrt{4 + \varepsilon} - 2\}.$$

A határérték definíciója

(Véges) határérték a végtelenben



D Határérték a végtelenben

1. Az f függvény **határértéke a végtelenben** L , jelölés

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \text{ vagy } \lim_{\infty} f = L,$$

ha értelmezési tartományának tetszőleges $N \in \mathbb{R}$ számnál van nagyobb x eleme, és

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \forall x \in \mathcal{D}(f) [x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon].$$

2. Az f függvény **határértéke a mínusz végtelenben** L , jelölés

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \text{ vagy } \lim_{-\infty} f = L,$$

ha értelmezési tartományának tetszőleges $N \in \mathbb{R}$ számnál van kisebb x eleme, és

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall x \in \mathcal{D}(f) [x < N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon].$$

Sorozat határértéke

- m A határérték definíciójával akkor lenne tökéletes az analógia, ha az f függvényről azt írnánk elő, hogy értelmezve legyen egy (N, ∞) , illetve a $-\infty$ -beli határérték esetén egy $(-\infty, N)$ intervallumon. E definíció viszont így lehetővé teszi a sorozat határértékének definiálását is, mivel egy s_n sorozat tekinthető egy $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek is.

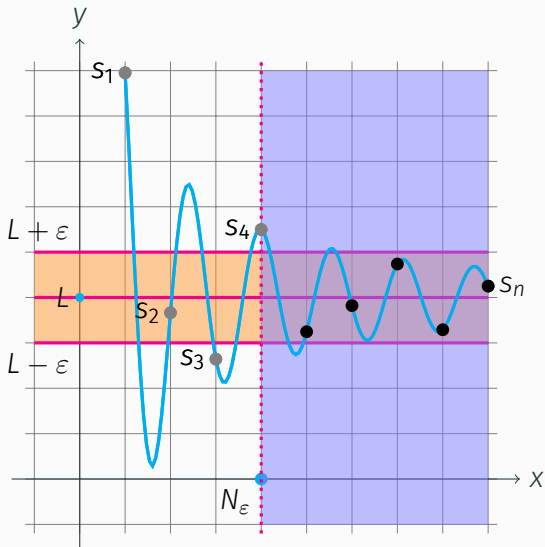
D Sorozat határértéke

Tekintsük az s_n ($n \in \mathbb{N}$) sorozatot. Azt mondjuk, hogy s_n határértéke L , jelölés

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = L,$$

ha

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon [n > N_\varepsilon \Rightarrow |s_n - L| < \varepsilon].$$



Határértékek kiszámítása

Határértékek kiszámítása

Határérték kiszámítására vonatkozó tételek

T Határértékek és algebrai műveletek

L, M, k valós, és $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. TFH

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \text{ és } \lim_{x \rightarrow c} g(x) = M.$$

Ekkor léteznek az alábbi határértékek és fennállnak a következők:

(1) Összeg, különbség: $\lim_c (f \pm g) = L \pm M,$

(2) Szorzat: $\lim_c (f \cdot g) = L \cdot M,$

(3) Konstanssal való szorzás: $\lim_c (k \cdot f) = k \cdot L,$

(4) Hányados: $\lim_c \frac{f}{g} = \frac{L}{M}$ (amennyiben $M \neq 0$),

(5) Racionális kitevőjű hatványozás: Ha r és s relatív prím egészek, $s \neq 0$, akkor $\lim_c f^{r/s} = L^{r/s}$, feltéve hogy $L^{r/s}$ valós szám (ha s páros, feltesszük, hogy $L > 0$).

P

Példa

Igazoljuk, hogy ha $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ és $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$, akkor

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = L + M.$$

M Legyen adva az $\varepsilon > 0$ szám. Meg kell adnunk egy pozitív δ -t, amelyre teljesül, hogy minden x esetén

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon.$$

A tagokat átrendezve és a háromszög-egyenlőtlenséget felhasználva:

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L + M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \leq \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \end{aligned}$$

M [folytatás] A megadott ε -hoz létezik olyan $\delta_1 > 0$ és $\delta_2 > 0$, hogy minden x -re

$$0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon/2,$$

$$0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \varepsilon/2.$$

Ha $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, akkor $0 < |x - c| < \delta$, és így $|f(x) - L| < \varepsilon/2$, és $|g(x) - M| < \varepsilon/2$. Tehát

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ami azt bizonyítja, hogy valóban: $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = L + M$.

D Polinom

A $P(x)$ függvényt polinomnak nevezzük, ha alkalmas $a_0, \dots, a_n$ valós számokkal $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ alakba írható. Az a_i értékeket a polinom együtthatóinak nevezzük. Ha $a_n \neq 0$, akkor azt mondjuk, hogy a $P(x)$ polinom foka n .

T Polinom határértéke = helyettesítési értéke

Ha $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, akkor

$$\lim_c P = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_0.$$

T Racionális törtfüggvény határértéke

Ha P és Q polinomfüggvények és $Q(c) \neq 0$, akkor

$$\lim_c \frac{P}{Q} = \frac{P(c)}{Q(c)}.$$

Határértékek kiszámítása

A szendvicstétel – rendőrelv – csendőrelv

T Szendvicstétel – rendőrelv – csendőrelv

Ha a c pontot tartalmazó nyílt intervallum (esetleg c kivételével) minden x elemére teljesül, hogy $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, és

$$\lim_c g = \lim_c h = L,$$

akkor fennáll $\lim_c f = L$ is.

T Tétel

Ha a c pontot tartalmazó nyílt intervallum (esetleg c kivételével) minden x elemére $f(x) \leq g(x)$, és léteznek a $\lim_c f$ és $\lim_c g$ határértékek, akkor

$$\lim_c f \leq \lim_c g.$$

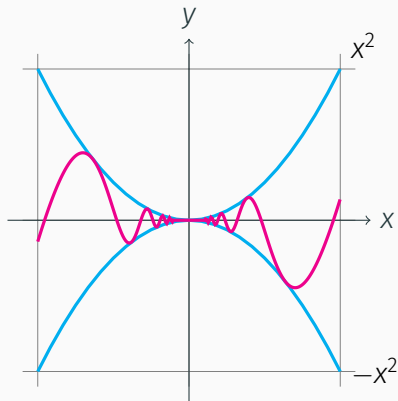
P

A szendvicstétel alkalmazása

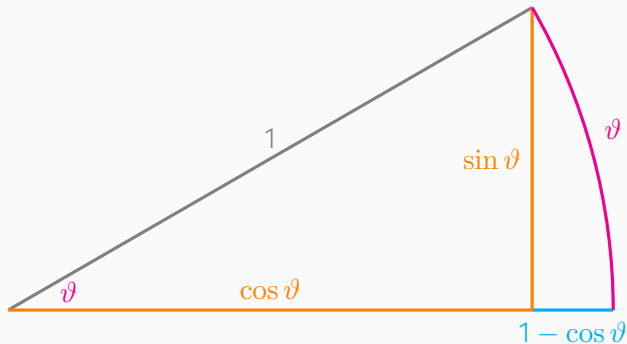
Mennyi a következő határérték?

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$$

M $-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2$
 $\lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, így
 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$



A trigonometrikus függvények becslése



$$|\sin \vartheta| \leq |\vartheta|$$

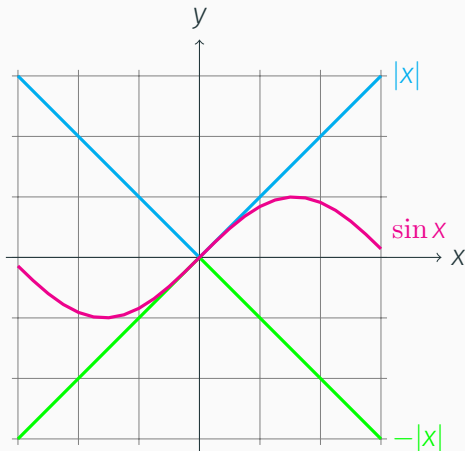
$$0 \leq 1 - \cos \vartheta \leq |\vartheta|$$

P

A szendvicstétel további alkalmazásai

$-|\vartheta| \leq \sin \vartheta \leq |\vartheta|$, és $\lim_{\vartheta \rightarrow 0} (-|\vartheta|) = \lim_{\vartheta \rightarrow 0} (|\vartheta|) = 0$, ezért

$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \sin \vartheta = 0.$$

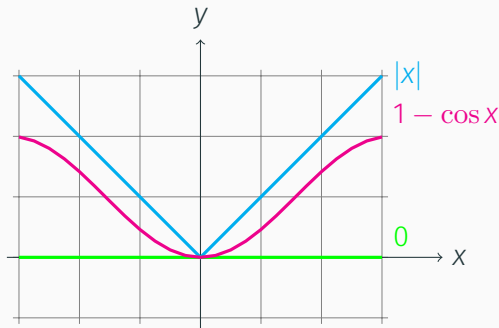


P

A szendvicstétel további alkalmazásai

$$0 \leq 1 - \cos \vartheta \leq |\vartheta|, \text{ így}$$

$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0} (1 - \cos \vartheta) = 0, \text{ azaz } \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \cos \vartheta = 1$$



Kiterjesztések

Kiterjesztések

Jobb és bal oldali határértékek

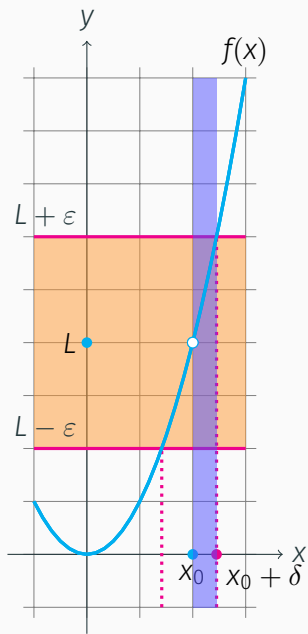
D Jobb és bal oldali határérték

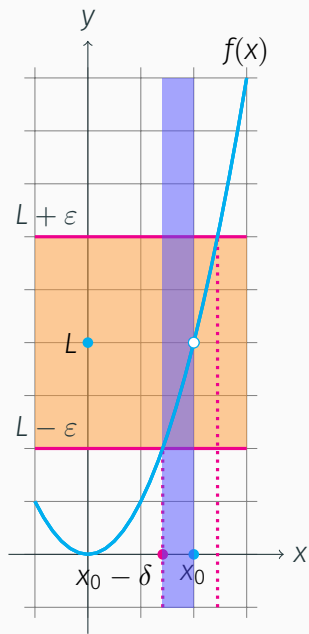
Az f függvény **jobb oldali határértéke** az x_0 helyen az L szám (jelölése: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$), ha

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x [x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon].$$

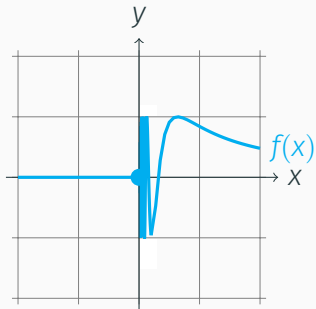
Az f függvény **bal oldali határértéke** az x_0 helyen az L szám (jelölése: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$), ha

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x [x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon].$$





$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

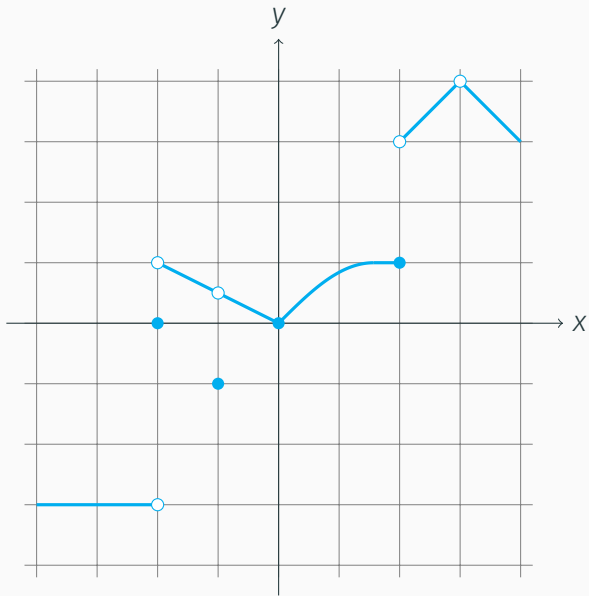
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \text{NEM LÉTEZIK}$$

T

Jobb és bal oldali határérték és határérték kapcsolata

f -nek pontosan akkor létezik a c helyen határértéke, ha ugyanitt létezik mind a jobb, mind a bal oldali határértéke és ezek egyenlőek:

$$\lim_c f = L \Leftrightarrow \lim_{c^+} f = L \text{ és } \lim_{c^-} f = L.$$

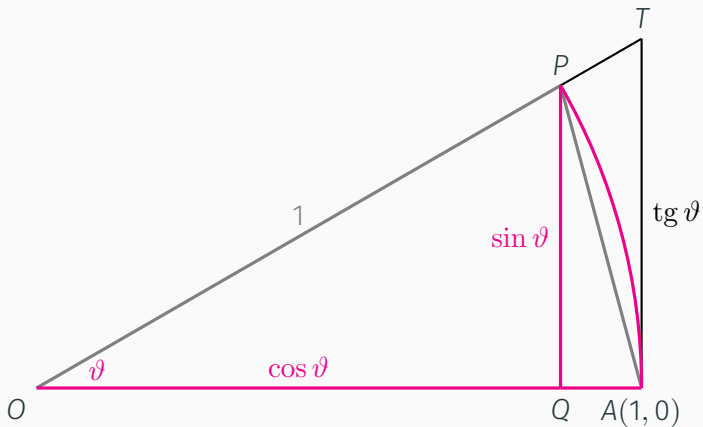


T A $\sin(\vartheta)/\vartheta$ függvény határértéke

Ha a ϑ szöget radiánban adjuk meg, akkor

$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} = 1. \quad (1)$$

B $OAP \triangle$ területe $<$ OAP körcikk területe $<$ $OAT \triangle$ területe.



Belátjuk: a jobb és a bal oldali határérték $1 \rightsquigarrow$ kétoldali határérték is 1.

1. A jobb oldali határérték 1 ($0 < \vartheta < \pi/2$):

$OAP \triangle$ területe $<$ OAP körcikk területe $<$ $OAT \triangle$ területe.

A területek:

$$T_{OAP\triangle} = \frac{1}{2} \cdot \text{alap} \cdot \text{magasság} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin \vartheta = \frac{1}{2} \sin \vartheta$$

$$T_{OAP \text{ körcikk}} = \frac{1}{2} \cdot \text{ív hossz} \cdot \text{sugár} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \vartheta = \frac{1}{2} \cdot (1)^2 \cdot \vartheta = \frac{\vartheta}{2}$$

$$T_{OAT\triangle} = \frac{1}{2} \cdot \text{alap} \cdot \text{magasság} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} \vartheta = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \vartheta$$

Az egyenlőtlenségbe helyettesítve:

$$\frac{1}{2} \sin \vartheta < \frac{1}{2} \vartheta < \frac{1}{2} \operatorname{tg} \vartheta$$

$\frac{1}{2} \sin \vartheta$ -val osztva ($\sin \vartheta > 0$):

$$1 < \frac{\vartheta}{\sin \vartheta} < \frac{1}{\cos \vartheta}$$

A reciprokokat véve:

$$1 > \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} > \frac{\cos \vartheta}{1}$$

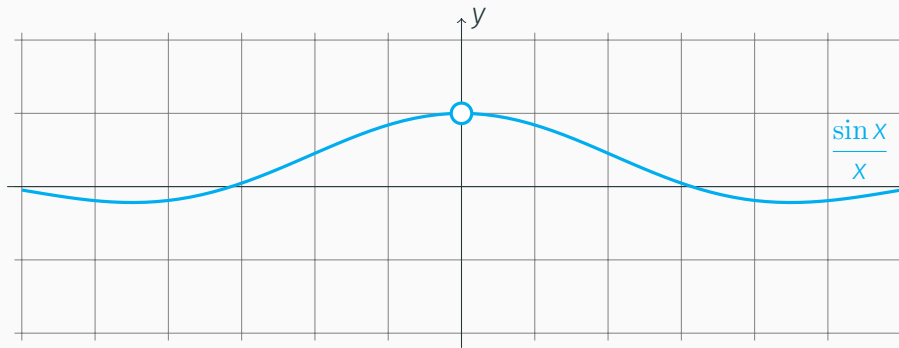
a szendvicstétel alapján

$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} = 1$$

2. $\sin \vartheta$ és ϑ páratlan függvények $\rightarrow (\sin \vartheta)/\vartheta$ páros $\rightarrow$

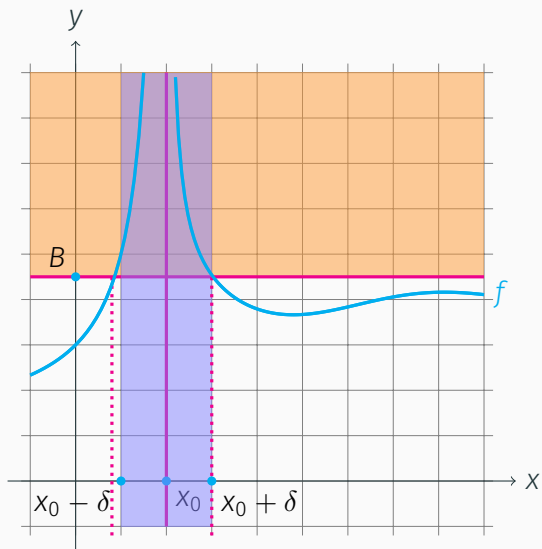
$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} = \lim_{\vartheta \rightarrow 0^-} \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} = 1,$$

$$\text{így } \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} = 1.$$



Kiterjesztések

A végtelen, mint határérték



Végtelen határértékek

1. Az f határértéke az x_0 helyen végtelen (∞), szimbolikusan

$$\lim_{x_0} f = \infty,$$

ha

$$\forall B \exists \delta > 0 \forall x [0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > B].$$

2. Az f határértéke az x_0 helyen mínusz végtelen ($-\infty$), szimbolikusan

$$\lim_{x_0} f = -\infty,$$

ha

$$\forall B \exists \delta > 0 \forall x [0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < B]$$

Igazoljuk, hogy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

m Megmutatjuk, hogy

$$\forall B \exists \delta > 0 \forall x \left[0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \frac{1}{x^2} > B \right]$$

$B \leq 0$ esetén $\frac{1}{x^2} > B$ teljesül. $B > 0$ esetén $\frac{1}{x^2} > B$ pontosan akkor, ha $x^2 < \frac{1}{B}$, azaz ha $|x| < \frac{1}{\sqrt{B}}$. Legyen $\delta \leq 1/\sqrt{B}$, akkor minden x -re

$$|x| < \delta \Rightarrow \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2} \geq B,$$

azaz

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

D Végtelen határértékek a végtelenben

1. Az f függvény határértéke a végtelenben végtelen (∞), szimbolikusan

$$\lim_{\infty} f = \infty,$$

ha

$$\forall B \exists M \forall x [x > M \Rightarrow f(x) > B].$$

2. Az f függvény határértéke a végtelenben mínusz végtelen ($-\infty$), szimbolikusan

$$\lim_{\infty} f = -\infty,$$

ha

$$\forall B \exists M \forall x [x > M \Rightarrow f(x) < B].$$

A műveletekről szóló korábbi tételben L és M lehet $\pm\infty$ is, de ilyenkor nem mindig tudjuk csupán a két függvény limeszéből meghatározni az összeg, szorzat, stb. limeszét:

+	$-\infty$	M	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?
L	$-\infty$	$L + M$	$+\infty$
$+\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

$\cdot$	$-\infty$	$M < 0$	0	$M > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	LM	0	LM	$-\infty$
0	?	0	0	0	?
$L > 0$	$-\infty$	LM	0	LM	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

$\lim f$	$-\infty$	$M < 0$	0^-	0	0^+	$M > 0$	$+\infty$
$\lim \frac{1}{f}$	0	$\frac{1}{M}$	$-\infty$	nincs	$+\infty$	$\frac{1}{M}$	0

0^+ : pozitívan tart 0-hoz

0^- : negatívan tart 0-hoz

A „határozatlan” $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ limeszeknél a függvényt próbáljuk meg úgy átalakítani, hogy az új kifejezés limesze már eldönthető legyen.

P $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - x + 2 = \infty - \infty + 2 = \infty - \infty = ?$, de

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - x + 2 = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) = \infty \cdot (1 - 0 + 0) = \infty \cdot 1 = \infty.$$

P $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 2}{2x^2 + 3} = \frac{\infty}{\infty} = ?$, de

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 2}{2x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x^2 \left(2 + \frac{3}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{2 + \frac{3}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

Kiterjesztések

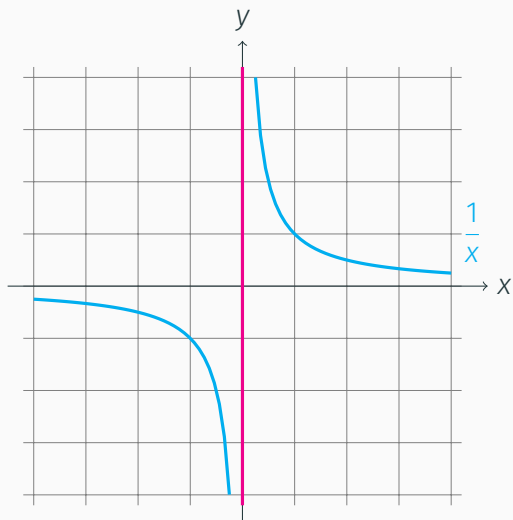
Aszimptoták, domináns tagok

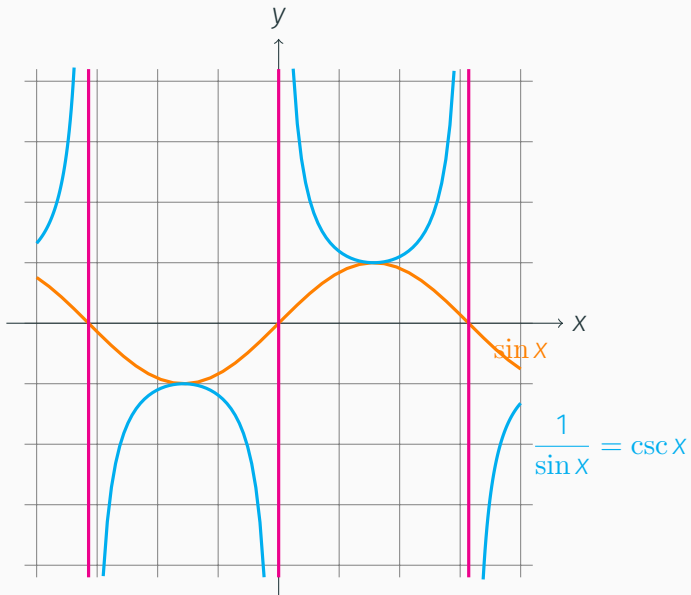
D

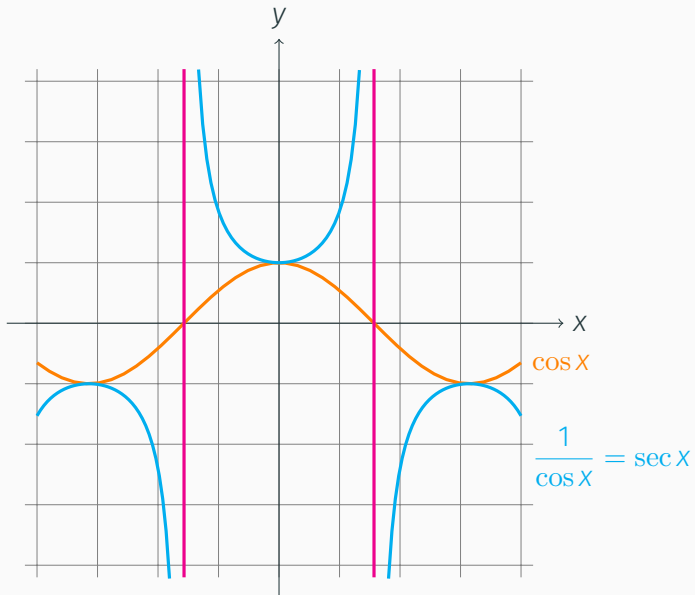
Függőleges aszimptota

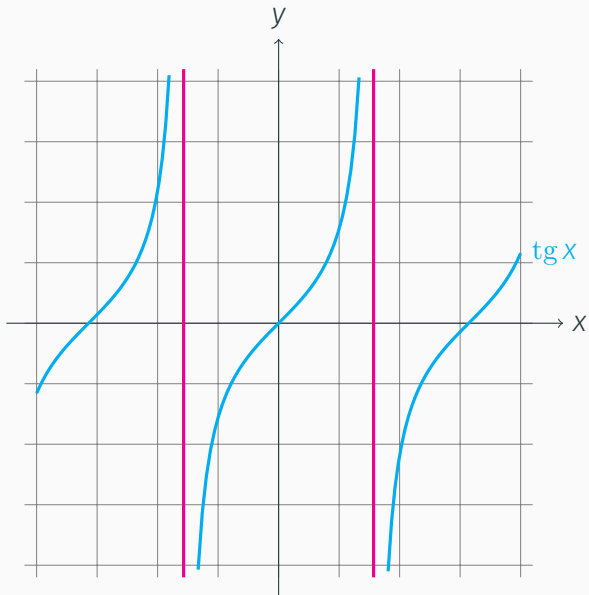
Az $x = a$ egyenletű egyenes az $y = f(x)$ függvény grafikonjának függőleges aszimptotája, ha

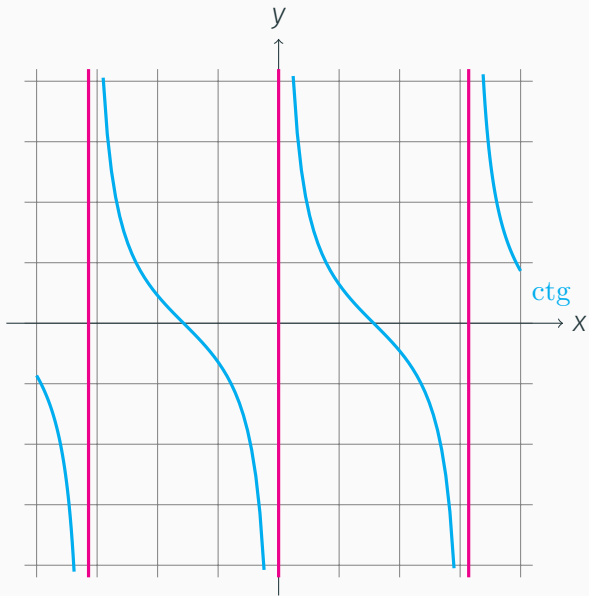
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty \text{ vagy ha } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$$

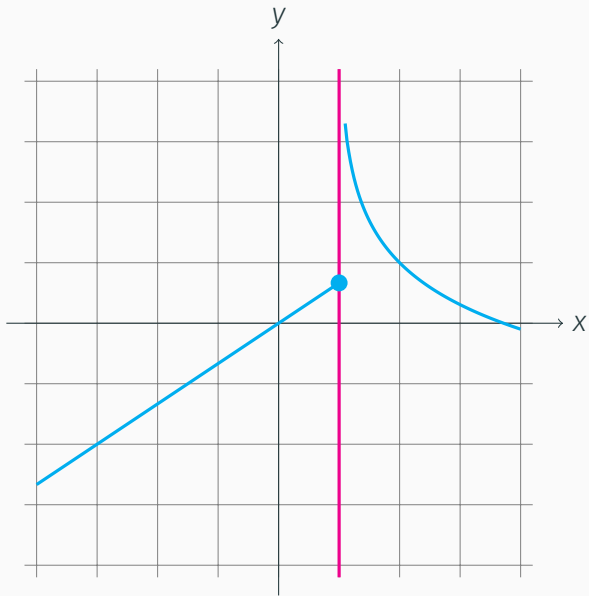










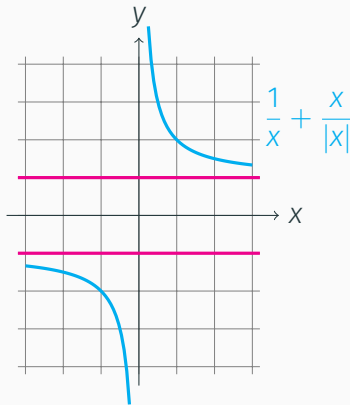
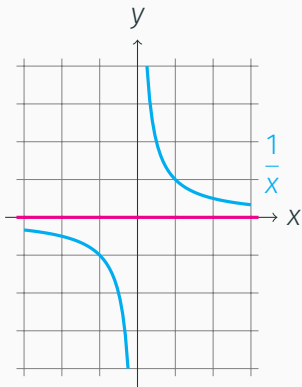


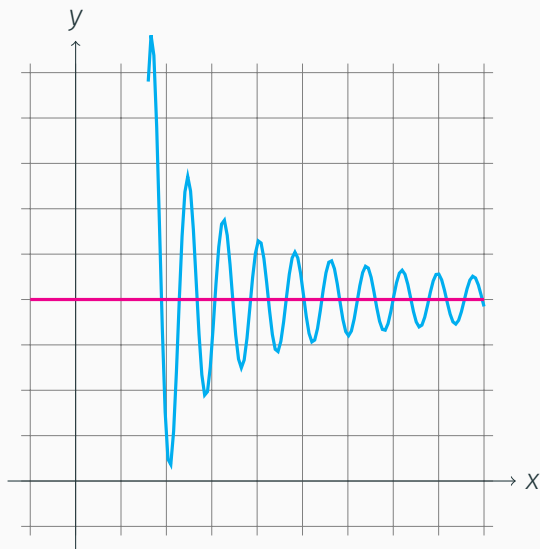
D

Vízszintes aszimptota

Az $y = b$ egyenletű egyenest az $y = f(x)$ függvény grafikonja vízszintes aszimptotájának nevezzük, ha

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \text{ vagy } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$$





D Ferde aszimptota (tartalmazza a vízszintest is)

Az $y = ax + b$ egyenletű egyenest az $y = f(x)$ függvény grafikonja ferde aszimptotájának nevezzük, ha

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \quad \text{vagy} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

- m Minden olyan racionális törtfüggvény grafikonjának van ferde aszimptotája, amelyben a számláló fokszáma eggyel nagyobb a nevezőénél (pl. $\frac{2x^3 - x}{x^2 + x + 1}$). Ilyenkor a polinomosztás hányadosa épp a ferde aszimptota egyenletét adja (ami mindkét végtelenben azonos).
- m Az a és b meghatározható az

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad \text{és a } b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$$

határértékek segítségével, ugyanis $f(x) - (ax + b) \rightarrow 0$ miatt $\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} \rightarrow 0$, azaz $\frac{f(x)}{x} \rightarrow a$.

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

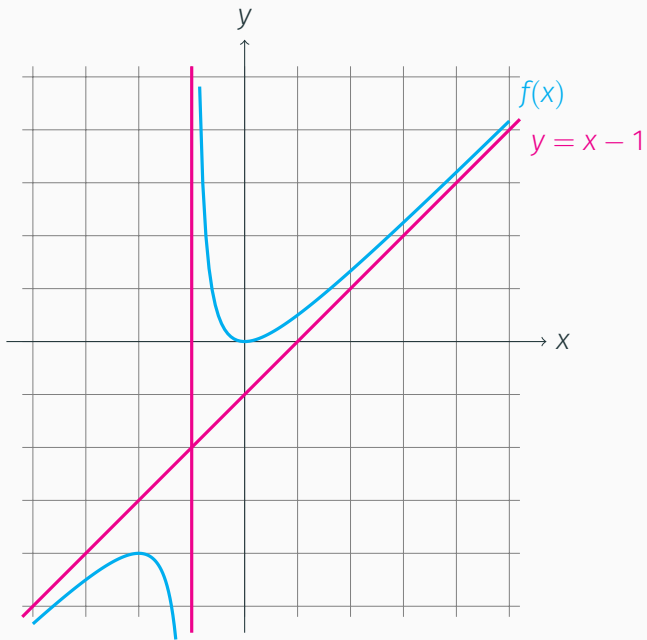
$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{x+1} = -1$$

Ugyanezeket a határértékeket kapjuk $-\infty$ -ben is!

A ferde aszimptota: $y = x - 1$.

A nevező zérushelye miatt a függőleges aszimptota: $x = -1$.



$$\frac{x^3 - 2x}{x^2 - 2x + 1}$$

$$1M \quad a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - 2x}{x^2 - 2x + 1} - x \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x - (x^3 - 2x^2 + x)}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x}{x^2 - 2x + 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = 2 \text{ tehát az aszimptota egyenlete } y = x + 2.$$

$$2M \quad \text{Polinomosztással: } \frac{x^3 - 2x}{x^2 - 2x + 1} = x + 2 + \frac{x - 2}{x^2 - 2x + 1},$$

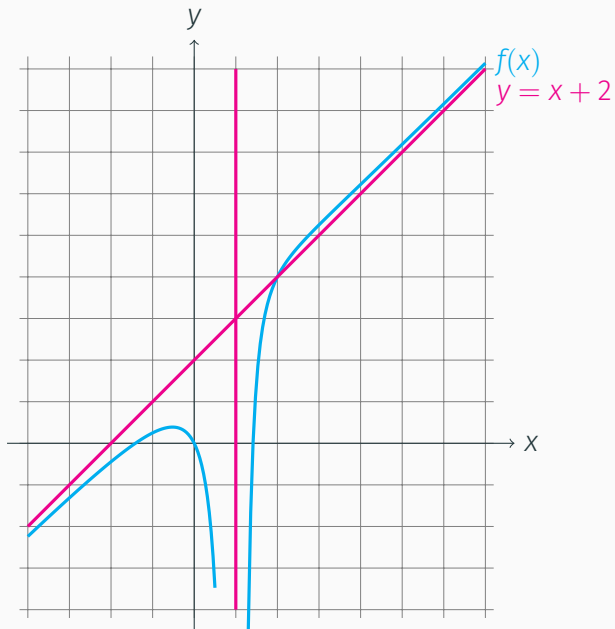
tehát az aszimptota egyenlete $y = x + 2$.

$$f(x) \approx x + 2$$

ha $|x|$ elég nagy, illetve

$$f(x) \approx 3 + \frac{x - 2}{x^2 - 2x + 1}$$

az 1 közelében



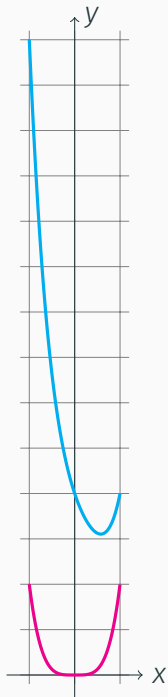
P Nagy léptékben azonosnak tűnő grafikonok

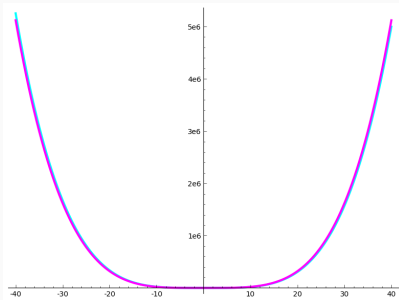
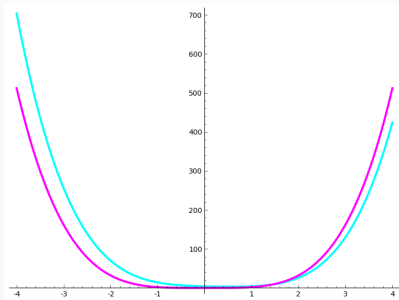
Legyen $f(x) = 2x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 3x + 4$ és $g(x) = 2x^4$. Mit jelent az, hogy f és g „elég nagy” abszolút értékű x -ek esetén jó közelítéssel azonosnak tekinthetők.

M Az f és a g hányadosának határértéke a ∞ és $-\infty$ helyeken:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 3x + 4}{2x^4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{2x^2} - \frac{3}{2x^3} + \frac{2}{x^4} \right)\end{aligned}$$

Elég nagy abszolút értékű x -ek esetén tehát f és g jó közelítéssel azonosnak tekinthetők.





Összefoglalás

1. Határértékek definíciói példákkal
2. Egységugrás függvény, $\sin \frac{1}{x}$ határértéke 0-ban nem létezik
3. Függvények összegének, szorzatának, hányadosának, skalárszorosának, racionális kitevős hatványának határértéke
4. Szendvicstétel
5. $\frac{\sin x}{x}$ határértéke
6. Aszimptoták