BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

Matematika A1a – Analízis

BMETE90AX00

Egyenes, sík (analitikus geometria)

H607, EIC – 2019-02-21

Wettl Ferenc
ALGEBRA TANSZÉK

Egyenes és szakasz

Egyenes és szakasz

Egyenes

D **Definíció**

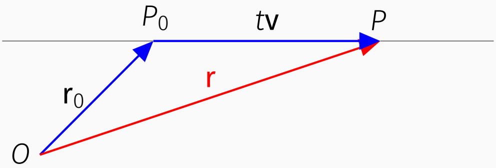
Az adott P_0 ponton áthaladó e egyenes irányvektorának nevezünk minden olyan $\mathbf{v}$ ($\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$) vektort, amely párhuzamos az e egyenessel.

T **Egyenes explicit (paraméteres) vektoregyenlete**

A $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton áthaladó, $\mathbf{v}$ irányvektorú e egyenes vektoregyenlete

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \quad -\infty < t < \infty,$$

ahol $\mathbf{r}$ az e egyenes egy $P(x, y, z)$ pontjának helyvektora, míg $\mathbf{r}_0$ a $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponté.



m Az előző egyenlet vektorait koordinátás alakba írva:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct).$$

T **Egyenes explicit (paraméteres) egyenletrendszere**

Ha a $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pont egy egyenes egyik pontja, irányvektora pedig $\mathbf{v} = (a, b, c)$, akkor az egyenes explicit egyenletrendszere

$$x = x_0 + at$$
$$y = y_0 + bt$$
$$z = z_0 + ct$$

ahol a t paraméter az összes valós számon végigfut.

P **Egy ponton átmenő, adott vektorral párhuzamos egyenes**

Legyen $P_0(2, -1, 3)$, $\mathbf{v} = (4, 3, 0)$.

m $x = 2 + 4t,\ y = -1 + 3t,\ z = 3.$

P **Két ponton átmenő egyenes**

Legyen $P_0(2, -1, 3)$, $P_1(6, 2, 3)$.

m $\overrightarrow{P_0P_1} = (4, 3, 0).$

$x = 2 + 4t,\ y = -1 + 3t,\ z = 3.$

Egyenes és szakasz

Szakasz

P **Szakasz paraméterezése**

Paraméterezzük a $P_0(2,-1,3)$, $P_1(6,2,3)$ pontokat összekötő szakasz pontjait.

m Az előző példa szerint az egyenes egyenletrendszere: $x = 2+4t,\ y = -1+3t,\ z = 3$. A t paraméterű pontot jelölhetjük P_t-vel, hisz a $P_t(x,y,z) = (2+4t, -1+3t, 3)$ jelöléssel $t = 0$ esetén épp a P_0, $t = 1$ esetén épp a P_1 pontot kapjuk. Így a $\overline{P_0P_1}$ szakasz paraméterezése: $x = 2+4t,\ y = -1+3t,\ z = 3,\ 0 \leq t \leq 1$.

Egyenes és szakasz

Egyenesvonalú egyenletes mozgás

P **Egyenes mentén egyenletesen mozgó pont mozgásának leírása**

A $P_0(2,-1,3)$ pontból 10 távolságegység/időegység sebességgel az $\mathbf{a}=(4,3,0)$ irányban haladva, hová jutunk 6 időegység alatt?

m Átírva a vektoregyenletet, annak fizikai értelmezés adható:

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}_0+t\,|\mathbf{v}|\,\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}=\mathbf{r}_0+t(\text{sebesség})(\text{mozgásirányú egységvektor}).$$

Most a sebesség $=10$, egységvektor $=(4/5,3/5,0)$, hisz $|\mathbf{a}|=5$.

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t)&=\mathbf{r}_0+t(\text{sebesség})(\text{mozgásirányú egységvektor})\\ \mathbf{r}(6)&=(2,-1,3)+6\cdot 10\cdot(4/5,3/5,0)=(50,35,3).\end{aligned}$$

(E példában a sebességvektor $\mathbf{v}=(8,6,0)$ az az irányvektor, mely a vektoregyenlet képletében szereplő $\mathbf{v}$ vektorral egybeesik.)

Egyenes és szakasz

Egyenes és pont távolsága

D

Alakzatok távolsága

Ha két alakzat pontjai páronkénti távolságának létezik a minimuma, akkor ezt hívjuk a két alakzat távolságának, vagyis ha $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ két alakzat a térben, akkor

$$d(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \min\{d(x,y) \mid x \in \mathcal{A}, y \in \mathcal{B}\}.$$

m Amennyiben a szóban forgó alakzatok pontok, egyenesek és síkok, akkor a fenti módon definiált távolság mindig létezik.

T

Egyenes és pont távolsága

A Q pont és a P ponton átmenő $\mathbf{v}$ irányvektorú egyenes távolsága:

$$\frac{|\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}$$

P **Példa**

Mennyi a $Q(-3,4,-3)$ pont és az $e: \; x = 1-4t, \; y = 2, \; z = 3t$ egyenes távolsága?

m $P(1,2,0)$, $\overrightarrow{PQ} = (-3-1, 4-2, -3-0) = (-4,2,-3)$,

$$\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & 2 & -3 \\ -4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (6,24,8)$$

$|(6,24,8)| = 26$, így

$$\frac{|\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} = \frac{|(6,24,8)|}{|(-4,0,3)|} = \frac{26}{5}.$$

Sík

Sík

Sík egyenlete

T

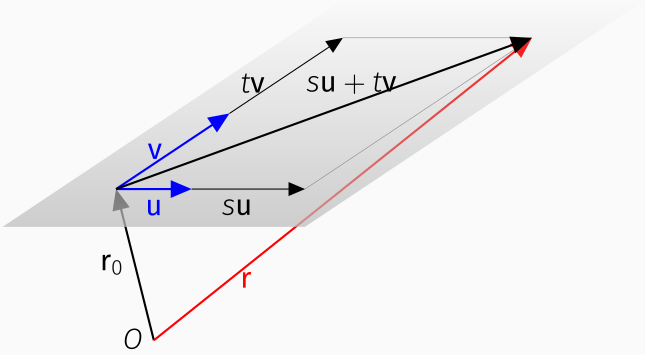
Sík explicit egyenletei

A $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton áthaladó ($\mathbf{r}_0$ helyvektorú), az $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektorok által kifeszített sík

explicit vektoregyenlete: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$.

explicit egyenletrendszere:

$$x = x_0 + su_1 + tv_1$$
$$y = y_0 + su_2 + tv_2$$
$$z = z_0 + su_3 + tv_3$$



A sík implicit egyenletei

D **Definíció**

Egy $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ vektort az S sík normálvektorának nevezzük, ha merőleges rá.

T **Sík implicit egyenletei**

A $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton áthaladó, $\mathbf{n} = (A, B, C)$ $(\mathbf{n} \neq \mathbf{0})$ normálvektorú sík

vektoregyenlete: $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0,$

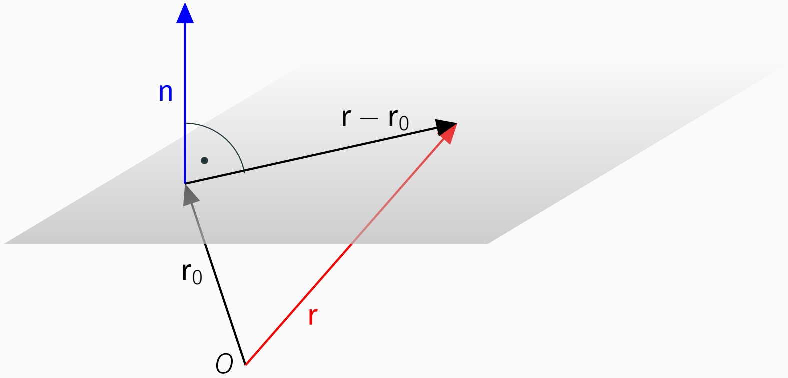
alapegyenlete: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$

általános egyenlete: $Ax + By + Cz = D,$

normálegyenlete: $$\frac{Ax + By + Cz - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0,$$

ahol $P(x, y, z)$ a sík egy tetszőleges pontja, és $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$. Normálegyenlet esetén a normálvektor egységvektor.

A sík implicit egyenletei



P

Sík egyenletének felírása

$P_0(1,-2,3)$, $\mathbf{u}=(3,0,2)$, $\mathbf{v}=(1,-3,0)$.

m Explicit egyenlet és egyenletrendszer:

$$(x,y,z)=(1,-2,3)+s(3,0,2)+t(1,-3,0)$$

$$x=1+3s+t$$

$$y=-2-3t$$

$$z=3+2s$$

$$\mathbf{n}=\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 3 & 0 & 2\\ 1 & -3 & 0\end{vmatrix}=(6,2,-9).$$

vektoregyenlet: $(6,2,-9)\cdot(x-1,y+2,z-3)=0,$

alapegyenlet: $6(x-1)+2(y+2)-9(z-3)=0,$

általános egyenlet: $6x+2y-9z=-25,$

normálegyenlet: $\frac{6x+2y-9z+25}{\sqrt{6^2+2^2+9^2}}=\frac{6}{11}x+\frac{2}{11}y-\frac{9}{11}z+\frac{25}{11}=0.$

P **Három ponton átmenő sík egyenlete**

$P(1,0,0)$, $Q(0,2,0)$, $R(0,0,3)$.

m Az explicit egyenletrendszerhez $\overrightarrow{PQ} = (-1,2,0)$, $\overrightarrow{PR} = (-1,0,3)$:

$$\begin{aligned} x &= 1 - s \quad - t \\ y &= \quad +2s \\ z &= \qquad\quad + 3t \end{aligned}$$

A normálvektor

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (6,3,2),$$

így az alapegyenlet $6(x-1) + 3(y-0) + 2(z-0) = 0$, az általános egyenlet $6x + 3y + 2z = 6$, a normálegyenlet $\frac{6}{7}x + \frac{3}{7}y + \frac{2}{7}z - \frac{6}{7} = 0$.

Sík

Sík és pont távolsága

P

Pont és sík távolsága

$Q(0,-1,1)$, S: $x+2y+2z=3$ (normálegyenlete: $\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z-1=0$).

m Legyen P az S sík egy tetszőleges pontja, ekkor Q és S távolsága:

$$\left|\overrightarrow{PQ}\cdot\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}\right|$$

ahol $\mathbf{n}$ az S sík egy normálvektora. Esetünkben legyen $P(-1,1,1)$. Így

$$\left|(1,-2,0)\cdot\frac{(1,2,2)}{3}\right|=|-1|=1.$$

A feladat mindig megoldható úgy, hogy a Q pont koordinátáit behelyettesítjük a sík normálegyenletének bal oldalába. A kapott érték épp a távolság. (Az előjel azt jelzi, hogy a pont a sík melyik oldalán van.) $\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{2}{3}\cdot(-1)+\frac{2}{3}\cdot 1-1=-1$.

Alakzatok közös pontjai

Két egyenes

Két egyenes kölcsönös helyzete:

- 0 közös pont - a két egyenes kitérő vagy párhuzamos, de nem azonos
- 1 közös pont - a két egyenes metsző
- végtelen sok közös pont - a két egyenes azonos

Két egyenes

P **Két egyenes metszéspontja**

e_1: $x = 1 + 2t,\ y = 1 + 3t,\ z = 1 + t$

e_2: $x = 2 + t,\ y = -t,\ z = 2 + t$

m Az második egyenletrendszerben a paramétert s-re cseréljük, majd az egyes koordinátákat egyenlővé tesszük:

$1 + 2t = 2 + s$

$1 + 3t = -s$

$1 + t = 2 + s$

Az egyenletrendszert megoldva $t = 0, s = -1$ (Ellenőrzés!), majd behelyettesítve $t = 0$-t e_1-be (vagy $s = -1$-et e_2-be), a metszéspont $(1, 1, 1)$.

Sík és egyenes

Sík és egyenes kölcsönös helyzete:

- 0 közös pont - az egyenes párhuzamos a síkkal
- 1 közös pont - az egyenes döfi a síkot
- végtelen sok közös pont - az egyenes része a síknak

Sík és egyenes

P **Sík és egyenes metszéspontja**

S: $x + 2y + 2z = 3$, e: $x = 3 - t,\ y = 2 + 2t,\ z = 1$.

m Behelyettesítjük az egyenes egy pontjának koordinátáit a sík egyenletébe. Az egyenes egy pontja: $(3 - t, 2 + 2t, 1)$, behelyettesítve: $(3 - t) + 2(2 + 2t) + 2 \cdot 1 = 3$, azaz $t = -2$. Innen a közös pont: $(5, -2, 1)$. Ellenőrzés!

Két sík

Két sík kölcsönös helyzete:

- 0 közös pont - a két sík párhuzamos
- a két sík egy közös egyenesben metszi egymást
- a két sík azonos

Két sík

P **Két sík metszésvonalának egyenletrendszere**

S_1: $2x + z = 3$, S_2: $3y + z = 5$

m S_1 normálvektora: $(2, 0, 1)$,
S_2 normálvektora: $(0, 3, 1)$,

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-3, -2, 6),$$

Kell keresni még egy közös pontot, azaz a két egyenletből álló egyenletrendszer egy megoldását, ami biztosan létezik, ha a két sík nem párhuzamos. Legyen például $x = -1$, ekkor $z = 5$ és $y = 0$. Az egyenes egyenletrendszere:
$x = -1 - 3t,\; y = -2t,\; z = 5 + 6t.$

Fordított irány: egyenes egyenletrendszeréből megadni két sík egyenletét, melyeknek épp ez az egyenes a metszésvonala.

Az egyenes explicit egyenletrendszeréből a t paramétert kiküszöböljük:

$$\begin{matrix} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{matrix} \overset{a\neq 0}{\Rightarrow} \begin{matrix} bx = bx_0 + abt \\ \underline{ay = ay_0 + abt} \\ cx = cx_0 + act \\ az = az_0 + act \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} bx - ay = bx_0 - ay_0 \\ cx - az = cx_0 - az_0 \end{matrix} \overset{b=0,c=0}{\Longrightarrow} \begin{matrix} y = y_0 \\ z = z_0 \end{matrix}$$

vagy ha az irányvektor egyik koordinátája sem 0

$$\begin{matrix} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{matrix} \overset{a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0}{\Rightarrow} \begin{matrix} t = \dfrac{x - x_0}{a} \\ t = \dfrac{y - y_0}{b} \\ t = \dfrac{z - z_0}{c} \end{matrix} \Rightarrow \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Ez három sík egyenlete: $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}$, $\frac{x-x_0}{a} = \frac{z-z_0}{c}$, $\frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$.

D

Egyenesek implicit egyenletrendszere

Egyenes *implicit egyenletrendszerén* két olyan sík egyenletét étjük, melyek nem párhuzamosak, így metszésvonaluk egy egyenes.

P

Egyenes: explicitből implicit

Írjuk fel az e: $x = 3 - t,\ y = 2 + 2t,\ z = 1.$ egyenes egy implicit egyenletrendszerét!

M $z = 1$ az egyik sík, a másik két egyenletből t-t kifejezve $t = 3 - x$, $t = \frac{1}{2}y - 1 \rightsquigarrow 3 - x = \frac{1}{2}y - 1 \rightsquigarrow x + \frac{1}{2}y = 4.$ Az egyenletrendszer tehát

$$\begin{aligned} x + \tfrac{1}{2}y &= 4 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

Összefoglalás

Összefoglalás

- egyenes és sík explicit (paraméteres) és implicit (paramétermentes) egyenletei/egyenletrendszerei (két ponton átmenő egyenes, három ponton átmenő sík egyenleteinek felírása)
- térbeli alakzatok közös pontjai
    - két egyenes metszete
    - egyenes és sík metszete
    - két sík metszete
- térbeli alakzatok egymástól vett távolsága
    - pont távolsága egyenestől és síktól
    - két kitérő egyenes távolsága*
    - párhuzamos egyenesek és síkok közötti távolságok*
- síkok és egyenesek egymással bezárt szögei*

* a gyakorlaton