BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

Matematika A1a – Analízis

BMETE90AX00

Vektorok

StKis, EIC – 2019-02-12

Wettl Ferenc
ALGEBRA TANSZÉK

Vektorok a 2- és 3-dimenziós térben

Távolság, szög, orientáció

Összefoglalás

Vektorok koordinátás alakban

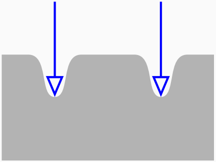
Az n-dimenziós tér

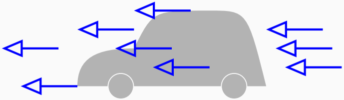
Összefoglalás

Vektorok a 2- és 3-dimenziós térben

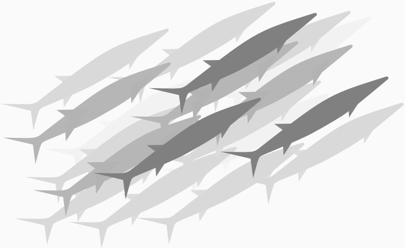
Irányított szakasz, kötött és szabad vektor

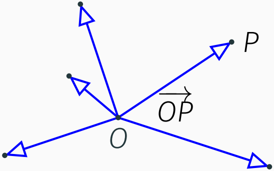
Kötött és szabad vektorok:





„Ha az irányított szakasz a hal, akkor a vektor a halraj.”

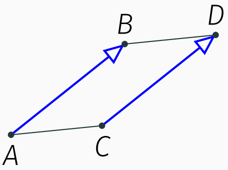




D

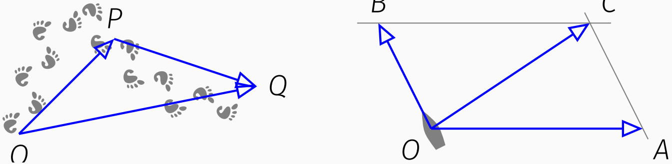
Definíció

Két irányított szakasz (azaz kötött vektor) akkor és csak akkor adja ugyanazt a (szabad) vektort, ha eltolással átvihetők egymásba.Azaz $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff ACDB$ egy (esetleg elfajuló) paralelogramma.



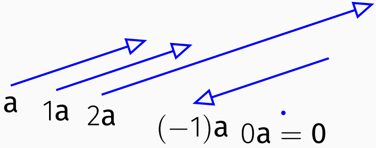
Vektorösszeadás, skalárral szorzás

Vektorösszeadás (háromszögmódszer, parallelogramma-módszer)



(a) *(b)*

Skalárral szorzás



T

A vektorműveletek tulajdonságai

Ha **a**, **b** és **c** a 2- vagy 3-dimenziós tér tetszőleges vektorai, **0** a zérusvektor és r, s két tetszőleges valós szám, akkor fönnállnak az alábbi azonosságok:

a)	$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$	*e)*	$r(s\mathbf{a})=(rs)\mathbf{a}$
b)	$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$	*f)*	$r(\mathbf{a}+\mathbf{b})=r\mathbf{a}+r\mathbf{b}$
c)	$\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$	*g)*	$(r+s)\mathbf{a}=r\mathbf{a}+s\mathbf{a}$
d)	$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$	*h)*	$1\mathbf{a}=\mathbf{a}$ és $0\mathbf{a}=\mathbf{0}$

Lineáris kombináció

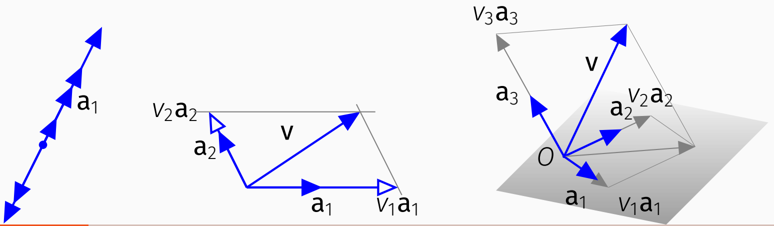
D

Lineáris kombináció

Az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,..., $\mathbf{a}_k$ vektorok lineáris kombinációján egy

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \ldots + c_k\mathbf{a}_k$$

alakú vektort értünk, ahol $c_1, c_2, \ldots, c_k$ valós számok. AMH $\mathbf{v}$ előáll az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,..., $\mathbf{a}_k$ lineáris kombinációjaként, ha vannak olyan $c_1, c_2, \ldots, c_k$ valósok, hogy $\mathbf{v} = c_1\mathbf{a}_1 + \ldots + c_k\mathbf{a}_k$. Az üres vektorhalmaz lineáris kombinációja a nullvektor.



Kollineáris és komplanáris vektorok

D

Definíció

Vektorok egy halmaza

- kollineáris (párhuzamos), ha a vektorok egy egyenesbe tolhatók, azaz közös kezdőpontból indítva egy egyenesben vannak
- komplanáris (egy síkba eső), ha a vektorok egy síkba tolhatók, azaz közös kezdőpontból indítva egy síkban vannak.

A skalárral való szorzás geometriai jelentéséből és a paralelogrammaszabályból következik, hogy

T

Tétel

Kollineáris (ill. komplanáris) vektorok összes lineáris kombinációja kollineáris (ill. komplanáris).

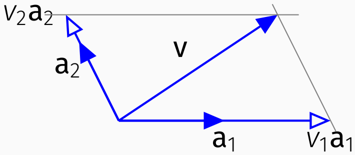
Egyértelmű lineáris kombináció

T

Síkbeli vektor felbontása

Ha $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ két nem párhuzamos vektor, akkor a síkjuk minden $\mathbf{v}$ vektora egyértelműen előáll e vektorok lineáris kombinációjaként, azaz egyértelműen léteznek olyan v_1 és v_2 valós számok, hogy

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2.$$



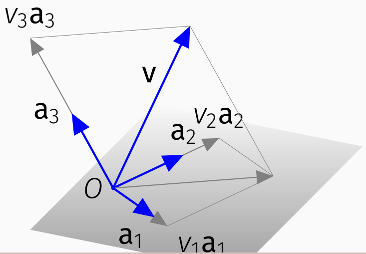
Egyértelmű lineáris kombináció

T

Térbeli vektor felbontása

Ha $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ három nem egy síkba eső vektor, akkor a tér minden $\mathbf{v}$ vektora egyértelműen előáll e vektorok lineáris kombinációjaként, azaz egyértelműen léteznek olyan v_1, v_2 és v_3 valós számok, hogy

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + v_3\mathbf{a}_3.$$



Távolság, szög, orientáció

D

Két vektor skaláris szorzata

Két vektor skaláris szorzatán a vektorok abszolút értékének és az általuk bezárt szög koszinuszának szorzatát értjük. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok skaláris szorzata tehát

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle},$$

ahol a két vektor által bezárt szög $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle}$.

A skaláris szorzás tulajdonságai

T **A skaláris szorzás műveleti tulajdonságai**

Ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ tetszőleges térbeli (síkbeli) vektorok és r tetszőleges valós szám, akkor igazak az alábbi összefüggések:

a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ (kommutativitás)

b) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ (disztributivitás)

c) $r(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (r\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (r\mathbf{b})$

d) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} > 0$, ha $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, és $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$, ha $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

T **Mikor 0 a skaláris szorzat?**

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \iff \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ ($\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ merőleges, ha bármelyikük a zérusvektor, vagy ha hajlásszögük $\pi/2$.)

Hosszúság és szög

D Vektor hossza: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}||\mathbf{a}| \cos 0 = |\mathbf{a}||\mathbf{a}|$, tehát $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$, azaz

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}.$$

D Két pont (vektor) távolsága

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|.$$

D Két vektor által bezárt szög:

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}, \qquad (1)$$

mivel a $[0, \pi]$ intervallumon a koszinusz függvény kölcsönösen egyértelmű.

Két fontos összefüggés

T **Pithagorász-tétel**

Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokra pontosan akkor teljesül az

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$$

összefüggés, ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ merőlegesek egymásra.

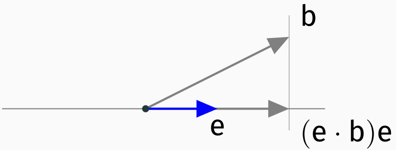
T **Háromszög-egyenlőtlenség**

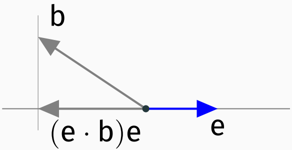
Bármely két $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorra

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|.$$

T **Egységvektorral való szorzás geometriai jelentése**

Ha $\mathbf{e}$ egységvektor, akkor a $\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{b})\mathbf{e}$ vektor a $\mathbf{b}$ vektornak az $\mathbf{e}$ egyenesére való merőleges vetülete. Az $\mathbf{e} \cdot \mathbf{b}$ szorzat e vetület előjeles hossza, mely pozitív, ha $\hat{\mathbf{b}}$ és $\mathbf{e}$ egyirányúak, és negatív, ha ellenkező irányúak.





J **Jelölés**

$\operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b}$ a $\mathbf{b}$ vektor $\mathbf{a}$ egyenesére eső merőleges vetületi vektora:

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{e}} \mathbf{b} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{b})\mathbf{e}.$$

Merőleges vetítés

T

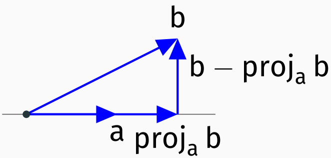
Vektor felbontása merőleges összetevőkre

Ha **a** és **b** a sík vagy a tér két vektora, és $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, akkor **b**-nek az **a** egyenesére eső merőleges vetülete

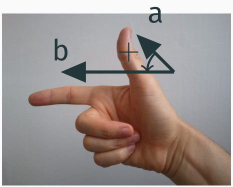
$$\operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a}.$$

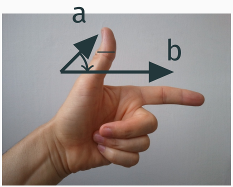
A **b**-nek az **a** egyenesére merőleges összetevője

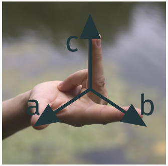
$$\mathbf{b} - \operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \mathbf{b} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a}.$$

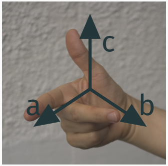


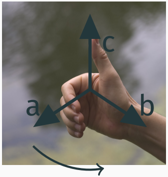
Orientáció

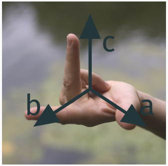


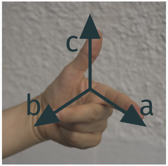


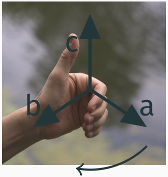












Vektori szorzás

D **Vektori szorzat**

A 3-dimenziós tér két vektorának vektori szorzatán azt a vektort értjük, melynek

- abszolút értéke a két vektor abszolút értékének és közbezárt szöge szinuszának szorzata,
- iránya merőleges mindkét vektor irányára és – ha a szorzat nem a nullvektor, akkor – az első tényező, a második tényező és a szorzat ebben a sorrendben jobbrendszert alkot.

- az abszolút érték nem negatív, mert sin a $[0, \pi]$-n nem negatív.
- Képletben: $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b}$, és $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ e sorrendben jobbrendszert alkot, ha $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \neq 0$.

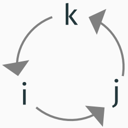
Vektori szorzás

P **i, j, k vektori szorzata**

Készítsünk műveleltáblát vektori szorzataikról!

M Mivel $(\mathbf{i},\mathbf{i})_\angle = 0$, ezért $|\mathbf{i}\times\mathbf{i}| = 0$, így $\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{0}$. Hasonlóan $\mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{k}\times\mathbf{k} = \mathbf{0}$.

$\times$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	$\mathbf{0}$



T

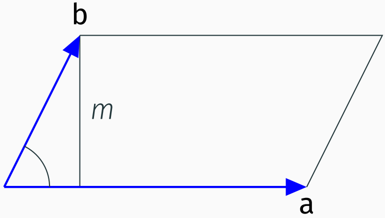
Mikor 0 a vektori szorzat?

Két térbeli vektor vektori szorzata pontosan akkor zérusvektor, ha a két vektor párhuzamos.

T

Vektori szorzat abszolút értékének geometriai jelentése

Két vektor vektori szorzatának abszolút értéke a két vektor által kifeszített parallelogramma területének mérőszámával egyenlő.



Vektori szorzás műveleti tulajdonságai

T

Vektori szorzás műveleti tulajdonságai

Tetszőleges $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorokra, valamint tetszőleges r valós számra igazak az alábbi összefüggések:

a) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ (alternáló tulajdonság)

b) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$

$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ (disztributivitás)

c) $r(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (r\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (r\mathbf{b})$

d) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2}$

A vektori szorzás nem kommutatív (alternáló) és nem asszociatív. Pl.

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j} = \mathbf{0}, \text{ de } \mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

Parallelepipedon térfogata

T **Parallelepipedon térfogata**

Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített parallelepipedon térfogata $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$.

B Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által kifeszített parallelogramma területe $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$, és $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ merőleges a parallelogramma síkjára. Az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ irányú egységvektor:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|},$$

a parallelepipedon magassága $|\mathbf{e} \cdot \mathbf{c}|$, és így a térfogat (azaz az alapterületszer magasság) értéke

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \left| \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} \cdot \mathbf{c} \right| = |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}| .$$

Tehát a parallelepipedon térfogata $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$.

D **Vegyes szorzat**

A 3-dimenziós tér három tetszőleges $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorából képzett

$$\mathbf{abc} := (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

kifejezést a három vektor *vegyes szorzatának* nevezzük.

- $\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab} = -\mathbf{acb} = -\mathbf{cba} = -\mathbf{bac}$.
- Később látni fogjuk, hogy ez azonos a három vektor koordinátáiból képzett táblázat determinánsával.

Vegyes szorzat geometriai jelentése

- A $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ skalárt az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített parallelelpipedon előjeles térfogatának nevezzük.
- Ez pontosan akkor negatív, ha a $\mathbf{c}$ vektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ egyenesére eső merőleges vetülete és $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ellenkező irányú. Vagyis ha a $\mathbf{c}$ vektor az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ síkjának másik oldalán van, mint az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektor, azaz ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ balrendszert alkot! Tehát e skalár előjele a három vektor orientációját adja.
- A három vektor pontosan akkor esik egy síkba, azaz pontosan akkor lineárisan összefüggők, ha $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$.

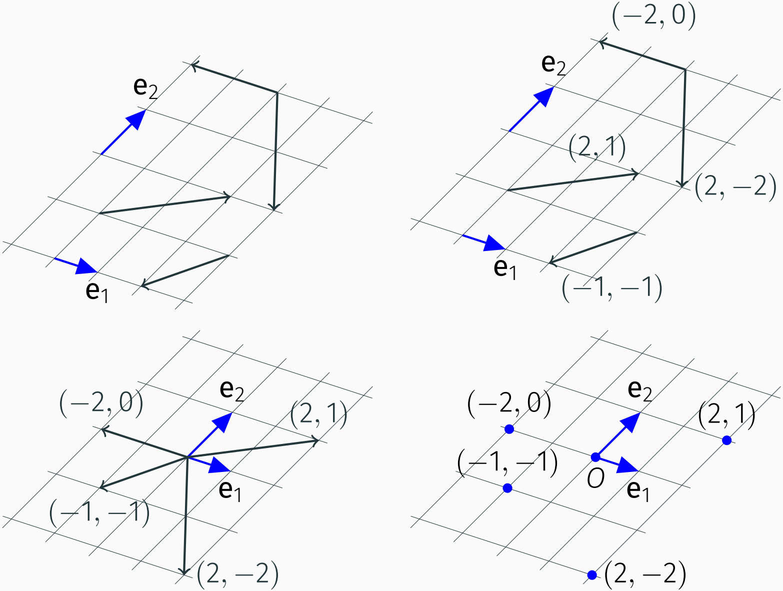
Összefoglalás

Összefoglalás

- szabad vektor fogalma
- két vektor összege, vektor skalárszorosa, vektorok lineáris kombinációja
- vektorok skaláris szorzata, mikor 0 a skaláris szorzat?
- egységvektorral való szorzás geometriai jelentése
- vektor abszolút értéke, és annak kiszámítása
- Pithagorász-tétel, háromszög-egyenlőtlenség
- orientáció, jobbrendszer, balrendszer
- vektoriális szorzás, mikor 0 a vektoriális szorzat?
- $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ geometriai jelentése: a paralelogramma területe
- vegyes szorzat, mikor 0 a vegyes szorzat?
- a vegyes szorzat geometriai jelentése: paralelepipedon előjeles térfogata

Vektorok koordinátás alakban

Vektorok és pontok koordinátái



Műveletek koordinátás alakban

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$,
$\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$,
λ tetszőleges valós szám

Összeadás:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

Skalárral való szorzás:

$$\lambda\mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$

Nullvektor:

$$\mathbf{0} = (0, 0, 0)$$

Műveletek koordinátás alakban

T **Tétel**

A síkbeli $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, illetve a térbeli $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektorok skaláris szorzata ortonormált koordinátarendszerben

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2, \text{ illetve } \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

B Síkbeli esetre: $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$ és $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$, ezért

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}) \cdot (v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}) \\ &= u_1v_1\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + (u_1v_2 + u_2v_1)\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + u_2v_2\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} \\ &= u_1v_1 + u_2v_2\end{aligned}$$

T

Vektori szorzat ortonormált koordinátarendszerben

A térbeli $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorok vektori szorzata derékszögű koordinátarendszerben

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

B

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \\
&= a_2b_3\mathbf{j} \times \mathbf{k} + a_3b_2\mathbf{k} \times \mathbf{j} + a_3b_1\mathbf{k} \times \mathbf{i} + a_1b_3\mathbf{i} \times \mathbf{k} + a_1b_2\mathbf{i} \times \mathbf{j} + a_2b \\
&= a_2b_3\mathbf{i} - a_3b_2\mathbf{i} + a_3b_1\mathbf{j} - a_1b_3\mathbf{j} + a_1b_2\mathbf{k} - a_2b_1\mathbf{k} \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \end{array}$$

$$a) \quad (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} & \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \end{array}$$

$$b) \quad \begin{aligned} &(a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + \\ &\quad (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + \\ &\quad\quad (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k} \end{aligned}$$

P **Parallelogramma területe**

Az (a,b) és a (c,d) vektorok által kifeszített parallelogramma területe $|ad-bc|$.

M $(a,b,0)$ és $(c,d,0)$ vektorok vektori szorzata

$$(a,b,0)\times(c,d,0)=(0,0,ad-bc),$$

ennek abszolút értéke $|ad-bc|$.
Mivel az $(a,b,0)$, $(c,d,0)$ és $(0,0,ad-bc)$ vektorok jobbrendszert alkotnak, ezért $ad-bc$ pontosan akkor pozitív, ha a síkban az (a,b) és a (c,d) vektorok jobbrendszert alkotnak, és $ad-bc$ pontosan akkor negatív, ha balrendszert.

Jelölés: $ad-bc=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, kiszámítás: $\begin{array}{ccc} & & - \\ a & b & \\ c & d & \\ & & + \end{array}$

T

Paralelepipedon előjeles térfogata

Az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ és $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ vektorok által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogata

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$$

(A térfogat ennek abszolút értéke. E szám 0, ha a vektorok egy síkba esnek, negatív, ha bal-, pozitív ha jobbrendszert alkotnak.)

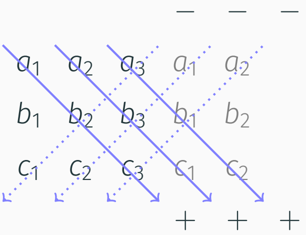
B $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$, a koordinátás alakokból kiszámolható:

$$(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \cdot (c_1, c_2, c_3) =$$
$$a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1.$$

Jelölés:

$$\mathbf{abc} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

E számot a három vektorból álló számtáblázat (mátrix) determinánsának nevezik.



Az n-dimenziós tér

Az n-dimenziós tér

D **Definíció**

A valós szám-n-esek összességét n-dimenziós valós térnek nevezzük.

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

Műveletek az n-dimenziós térben

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$

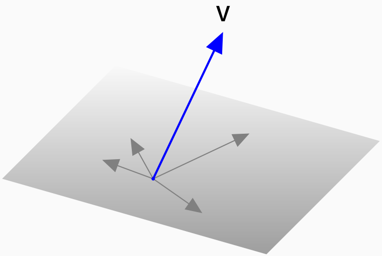
$$\lambda \mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots \lambda a_n)$$

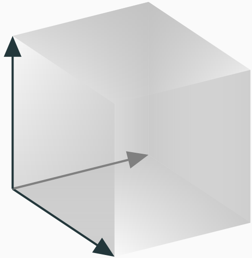
$$\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$$

D

Vektorok függetlensége

- Azt mondjuk, hogy egy $\mathbf{v}$ vektor lineárisan független az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ vektoroktól (e vektorok halmaza lehet az üres halmaz is), ha $\mathbf{v}$ nem fejezhető ki e vektorok lineáris kombinációjaként.
- Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ $(n \geq 1)$ vektorok lineárisan függetlenek, ha e vektorok egyike sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként.
- Ha legalább egyikük kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként, azaz lineárisan függ a többitől, akkor e vektorokat lineárisan összefüggőknek, illetve e vektorokból álló vektorrendszert lineárisan összefüggőnek nevezzük.





- A bal ábrán a **v** vektor független a többitől. A jobb ábrán mindegyik a többitől, így azok lineárisan függetlenek (az a vektorrendszer lineárisan független).
- Az egyetlen vektorból álló vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha a vektor nem a zérusvektor. (Ui. ekkor a „többi” vektor halmaza az üres halmaz, melynek a **0**-vektor a lineáris kombinációja!) Azaz az egyetlen zérusvektorból álló vektorrendszer lineárisan összefüggő.

T

Tétel

Tetszőleges $\mathbb{R}^n$-beli $\mathcal{V} = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \}$ vektorrendszerre az alábbi két állítás ekvivalens:

1. $\mathcal{V}$ lineárisan független.
2. A zérusvektor csak egyféleképp – a triviális módon – áll elő $\mathcal{V}$ lineáris kombinációjaként. Másként fogalmazva, a c_1, c_2,...,c_k skalárokkal vett lineáris kombináció csak akkor lehet a nullvektor, azaz

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

csak akkor állhat fenn, ha

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0.$$

Lineáris függetlenség ekvivalens megfogalmazásai

B Kontrapozíciós bizonyítás ($A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$)
(1. $\Rightarrow$ 2.) Ha $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ és például $c_1 \neq 0$, akkor átrendezve:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{-c_2}{c_1}\mathbf{v}_2 + \ldots + \frac{-c_k}{c_1}\mathbf{v}_k$$

(1. $\Leftarrow$ 2.) Ha például $\mathbf{v}_1 = c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k$, akkor átrendezve:

$$\mathbf{v}_1 - c_2\mathbf{v}_2 - \ldots - c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

m A bizonyítás első felében feltettük, hogy ha valamelyik együttható nem nulla, akkor az lehet a c_1, mert egy másik együtthatóra a bizonyítás lényegében ugyanígy menne. Ezt matematikai szövegben úgy fogalmazzák meg, hogy „ha van olyan együttható, amelyik nem nulla, akkor az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy az c_1".

Skaláris szorzás $\mathbb{R}^n$-ben

D

Definíció

Az $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ n-dimenziós vektorok skaláris szorzata

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

T

A skaláris szorzás tulajdonságai

Legyen $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ az $\mathbb{R}^n$ három tetszőleges vektora, és legyen c egy teszőleges valós. Ekkor

a)	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$	kommutatív
b)	$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$	disztributív
c)	$(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$	a két szorzás kompatibilis
d)	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ és $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.	

Távolság $\mathbb{R}^n$-ben

D

Abszolút érték, norma, távolság

Legyen $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ az $\mathbb{R}^n$ tér két tetszőleges vektora.

- Az $\mathbf{u}$ vektor hosszán (vagy euklideszi normáján) önmagával vett skaláris szorzatának gyökét értjük, azaz $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$.
- A két vektor távolságán (végpontjaik távolságán) a $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |\mathbf{u} - \mathbf{v}|$ értéket értjük.

T

Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség

Két vektor skaláris szorzatának abszolút értéke sosem nagyobb abszolút értékeik szorzatánál, azaz

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|.$$

Egyenlőség csak akkor áll, ha párhuzamosak.

D **Szög, merőlegesség**

- Az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok (hajlás)szögének koszinuszát az alábbi törttel definiáljuk:

$$\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})_\angle := \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} \tag{2}$$

- Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok merőlegesek egymásra, ha $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Összefoglalás

Összefoglalás

- vektorok koordinátás alakja
- skaláris szorzat koordinátás alakban
- vektoriális szorzat koordinátás alakban
- az n-dimenziós tér
- lineáris függetlenség és ekvivalens alakja
- skaláris szorzat $\mathbb{R}^n$-ben és tulajdonságai
- vektorok hossza, távolsága, szöge, merőlegessége $\mathbb{R}^n$-ben
- Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség