



Matematika A1a – Analízis

BMETE90AX00



Komplex számok

StKis, EIC – 2019-02-06



Wetttl Ferenc

ALGEBRA TANSZÉK

A komplex számok rövid története*

A komplex számok rövid története^{*}

A számfogalom bővülése

- pozitív egészek – összeadás, szorzás
- $a + x = b$ megoldhatósága $\rightarrow$ negatív számok és 0
- $ax = b$ megoldhatósága $\rightarrow$ racionális számok
- $x^2 = 2$ megoldása $\rightarrow$ vannak nem racionális számok is
- sorozatok határértékének fogalma $\rightarrow$ irracionális számok
- racionális + irracionális számok $\rightarrow$ valós számok
- az $x^2 = -1$ egyenlet megoldásával lesz további bővítés???
- Cardano képlete a harmadfokú egyenlet megoldására
(1545-ből): $x^3 + px + q = 0$ megoldása: $x = u - \frac{p}{3u}$, ahol

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Akkor kell negatív számból négyzetgyököt vonni, ha mindhárom gyök valós.

A komplex számok rövid története^{*}

Egy kis történelem

- **Girolamo Cardano** (1501–1576) orvos, filozófus, matematikus – 1538 körül értesül arról, hogy Scipione del Ferro és Niccolò Tartaglia egymástól függetlenül felfedezték az $x^3 + px = q$ alakú harmadfokú egyenlet megoldását – 1545-ben megírja „Ars magna sive de regulis algebraicis” című művét, benne a megoldóképlettel – 1552-től kezdődően Európa egyik leghíresebb orvosa – a 60-as évek elején elveszti két fiát (gyilkosságért halál, rablásért száműzetés) – 1570-ben Bolognában bebörtönzik, szabadulása után Rómába költözik
- **Scipione del Ferro** (1465–1526) felfedezi a harmadfokú egyenlet megoldásának módját – titokban tartja (kivétele Nave, Fiore)

- Niccolò Fontana (1499–1557) gúnynevén Tartaglia (dadogó) (1511 Brescia, francia dúlás) – 1535: Fiore kihívja Tartagliát egy 15 napos versenyre (30 feladat, a vesztes a győztest és 29 barátját megvendégeli) – felkészüléskor Tartaglia rájön a nehezebb típusú harmadfokú egyenletek megoldási módjára
- Cardano (kilátásba helyezve Tartaglia tűzéségi találmányainak pártfogót keres, titoktartás ígérete mellett megszerzi a titkot) – amikor Navétól megtudja, hogy del Ferro is ismerte e képleteket, felmentve érzi magát, és publikálja (a negyedfokú esetre is továbbfejlesztve az eredményt)
- Tartaglia leírta „megcsalatásának” történetét
- Milánóban Ferrari (Cardano tanítványa) vitára hívja Tartagliát, aki a vitát elveszti, ennek következtében lehetőségeit (nyilvános előadások) elveszíti

A komplex számok rövid története^{*}

A megoldóképlet egy speciális esetre

Oldjuk meg az $x^3 = bx + c$ egyenletet!

A Tartaglia által talált képlet (ennél később precízebb formában fogjuk tanulni):

$$x = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}}$$

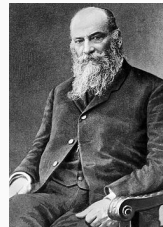
Oldjuk meg a $x^3 = 7x + 6$ egyenletet!

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{\frac{6}{2} + \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{6}{2} - \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{3}\right)^3}} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt[3]{81 + 30\sqrt{-3}} + \frac{1}{3} \sqrt[3]{81 - 30\sqrt{-3}} \\ &= \frac{1}{3} \left(9/2 + 1/2\sqrt{-3}\right) + \frac{1}{3} \left(9/2 - 1/2\sqrt{-3}\right) \\ &= 3 \end{aligned}$$

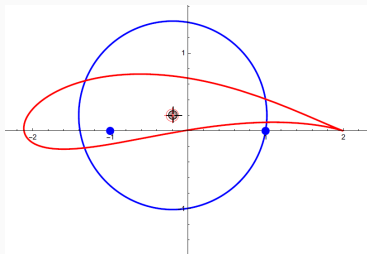
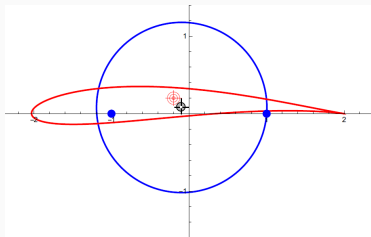
A komplex számok rövid története*

Alkalmazások

hidrodinamika, áramlások vizsgálata,
Zsukovszkij-féle szárnyprofil (Joukowski
/ Zhukovskii / Zhukovsky Airfoil, Nikolay
Yegorovich Zhukovsky, Никола́й Егорович
Жуко́вский)

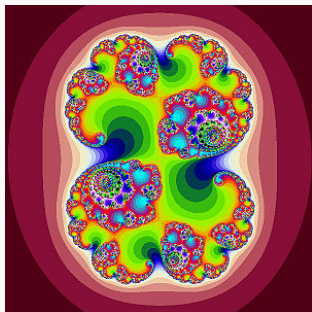
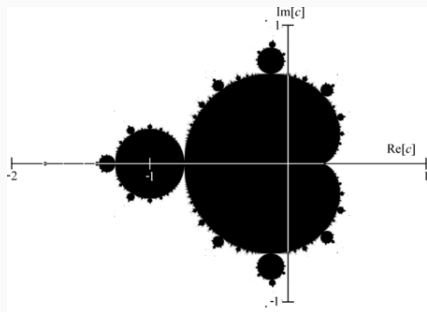


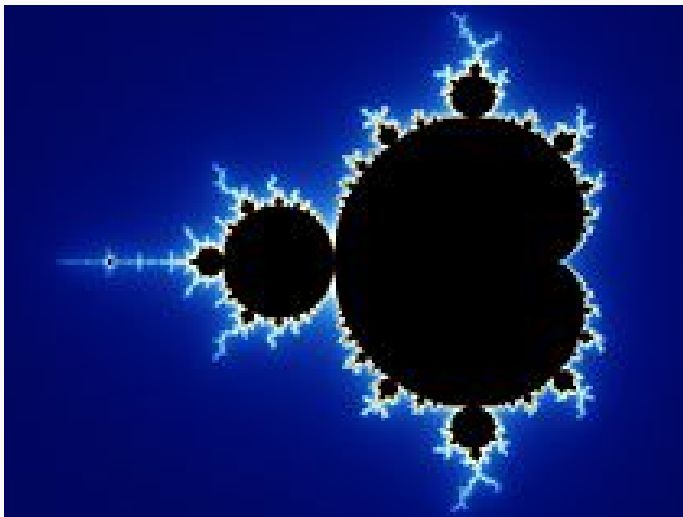
- $z \mapsto z + \frac{1}{z}$:



- Egy „Wolfram demonstration” animáció.

- elektromosságtan, jelfeldolgozás, villamosmérnöki tudományok
- lineáris rendszerek, lineáris differenciálegyenletek megoldása
- relativitáselmélet, kvantummechanika
- fraktálok (Mandelbrot-halmazok: ahol a $z_0 = c$, $z_n = z_{n-1}^2 + c$ sorozat korlátos; Julia-halmazok)





Számolás komplex számokkal

Számolás komplex számokkal

Komplex számok algebrai alakja

D komplex szám algebrai alakja

A $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ alakú kifejezéseket komplex számoknak nevezzük, ahol i az a szám, melyre $i^2 = -1$ (imaginárius egység: imaginárius = nem valódi).

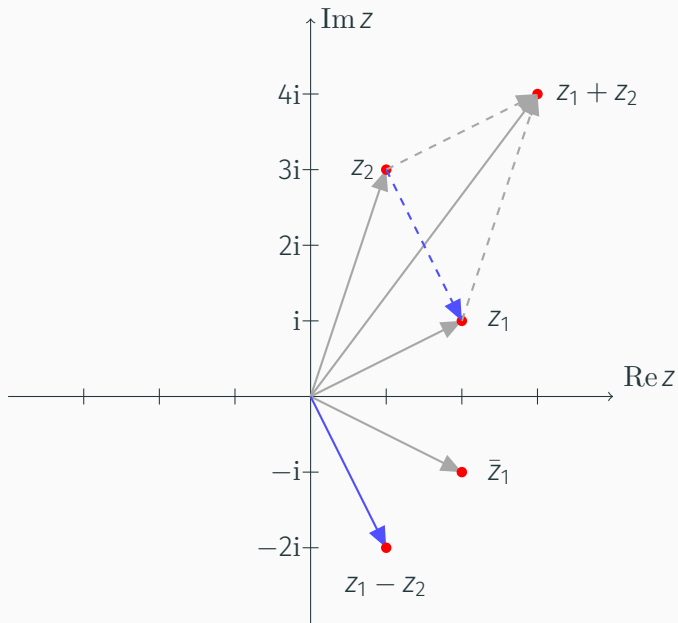
A komplex számok halmazát $\mathbb{C}$ jelöli.

Egy komplex szám több alakban is felírható, ezt az alakot algebrai alaknak nevezzük.

Az a szám a z valós része, a b az imaginárius, jelölése: $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$ (más szokásos jelölés: $a = \Re(z)$, $b = \Im(z)$).

D konjugált

$\bar{z} = a - ib$, ahol $z = a + ib$



Számolás komplex számokkal

Műveletek algebrai alakkal

$$(2 + 3i) - (3 - i), (2 + 3i)(3 - i), \frac{1}{i}, \frac{2 + 3i}{3 + i}, \sqrt{-5 + 12i}$$

M $(2 + 3i) - (3 - i) = -1 + 4i$

$$(2 + 3i)(3 - i) = 2 \cdot 3 + 3i(-i) + (3i) \cdot 3 + 2 \cdot (-i) = 9 + 7i$$

$$\frac{1}{i} = -i$$

$$\frac{2 + 3i}{3 + i} = \frac{(2 + 3i)(3 - i)}{(3 + i)(3 - i)} = \frac{9 + 7i}{10} = \frac{9}{10} + \frac{7}{10}i$$

$$\sqrt{-5 + 12i} = a + bi \rightsquigarrow -5 + 12i = a^2 - b^2 + 2abi \rightsquigarrow$$

$$a^2 - b^2 = -5, ab = 6, \text{ azaz } b = 6/a \rightsquigarrow a^4 + 5a^2 - 36 \rightsquigarrow a^2 = 4$$

(vagy $a^2 = -9$, ez hamis gyök) $\rightsquigarrow a = \pm 2, b = \pm 3 \rightsquigarrow \sqrt{-5 + 12i}$
két értéke $2 + 3i$ és $-2 - 3i$.

P Alapműveletek algebrai alakkal

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

Alapműveletek algebrai alakban: összeadás, kivonás, szorzás algebrai kifejezésként az $i^2 = -1$ helyettesítést használva; osztás a nevező konjugáltjával való bővítéssel.

T Tétel

$\mathbb{C}$ test

(azaz $\mathbb{C}$ zárt az összeadás és szorzás műveletére, mindkét művelet kommutatív és asszociatív, az összeadás invertálható, a szorzás invertálható a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ halmazon, a szorzás

Konjugált tulajdonságai

$$1. \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$$

$$2. \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

$$3. \overline{z_1 / z_2} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2$$

$$4. \bar{\bar{z}} = z$$

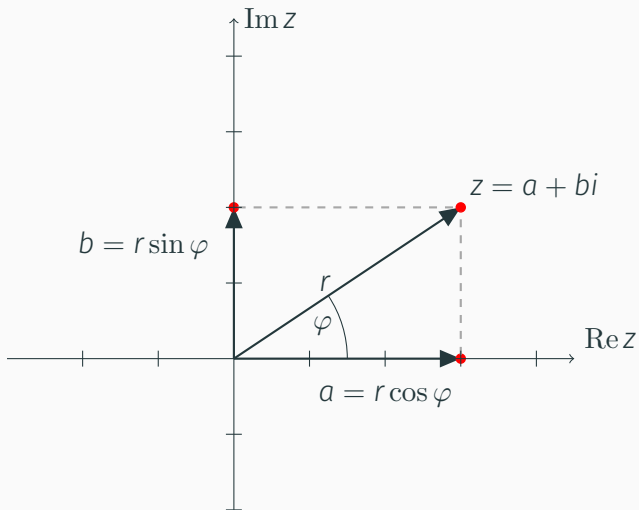
Számolás komplex számokkal

Trigonometriai alak

D Definíció

Az (a, b) vektor x -tengellyel bezárt szöge legyen φ , hossza r . Ekkor a $z = a + ib$ komplex szám felírható $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ alakban is, hisz $a = r \cos \varphi$, és $b = r \sin \varphi$. Ezt az alakot **trigonometriai alaknak**, az r nemnegatív valóst a komplex szám **abszolút értékének**, φ -t **irányszögének**, **arkuszának** vagy **argumentumának** nevezzük: $r = |z|$, $\varphi = \arg z$.

- m A komplex számok algebrai alakja egyértelmű, a trigonometriai alak nem.



Kapcsolat az algebrai és trigonometriai alak között

Ha $z = a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, akkor

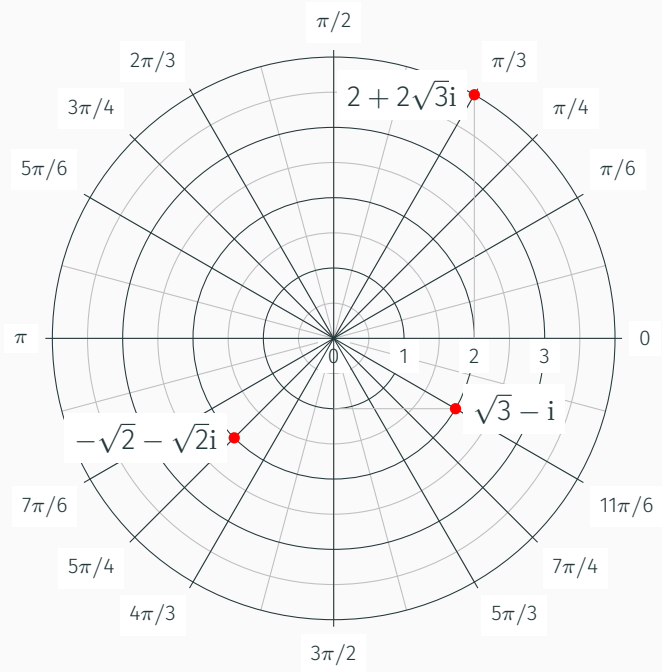
$$a = r \cos \varphi$$

$$b = r \sin \varphi$$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}, (z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2)$$

$$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} \arctg(\frac{b}{a}) & \text{ha } a > 0 \\ \arctg(\frac{b}{a}) + \pi & \text{ha } a < 0 \text{ és } b \geq 0 \\ \arctg(\frac{b}{a}) - \pi & \text{ha } a < 0 \text{ és } b < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{ha } a = 0 \text{ és } b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{ha } a = 0 \text{ és } b < 0 \\ \text{határozatlan} & \text{ha } a = 0 \text{ és } b = 0 \end{cases}$$

ahol $\varphi \in (-\pi, \pi]$.



Számolás komplex számokkal

Műveletek trigonometriai alakkal

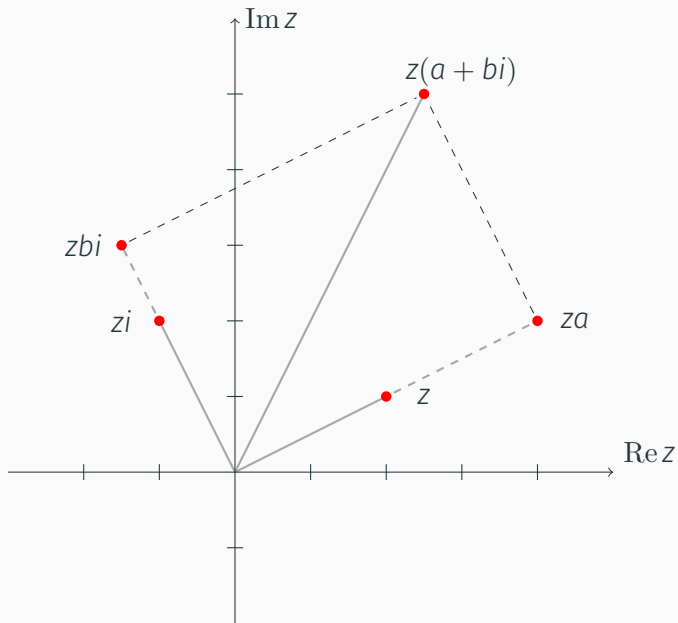
$$\begin{aligned}
 & [2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})][\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}] = \\
 & 2\cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{7\pi}{6} - 2\sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{7\pi}{6} + 2[\cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{7\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{7\pi}{6}]i = \\
 & 2\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{7\pi}{6}) + 2\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{7\pi}{6})i = 2\cos \frac{3\pi}{2} + 2\sin \frac{3\pi}{2}i = -2i.
 \end{aligned}$$

Ellenőrzés:

$$(1 + \sqrt{3}i)(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i^2 - \frac{i}{2} - \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}i = -2i.$$

K Mi a geometriai jelentése az i -vel való szorzásnak?

K Mi a geometriai jelentése a $\cos \varphi + i \sin \varphi$ számmal való szorzásnak?



Á Szorzás, osztás trigonometriai alakban

Legyen $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$. Ekkor

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

B A szögek összegére vonatkozó trigonometriai azonosságokkal:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \\ &\quad i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

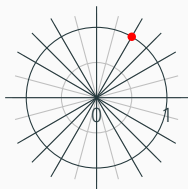
Az osztásra hasonlóan.

T Abszolút érték tulajdonságai

1. $|\bar{z}| = |z|$
2. $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
3. $|z_1 / z_2| = |z_1| / |z_2|$
4. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (háromszög-egyenlőtlenség)

Számolás komplex számokkal

Hatványozás, gyökvonás



P

Példa

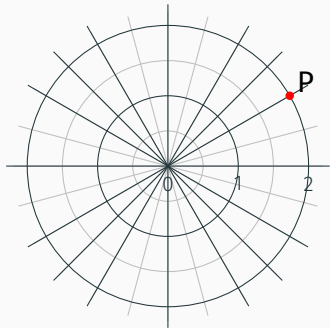
Számítsuk ki

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{100}$$

értékét!

M $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ trigonometriaial alakja: $\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$.

$$\left[\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right]^{100} = \cos \frac{100\pi}{3} + i \sin \frac{100\pi}{3} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$



Példa

Számítsuk ki

$$(\sqrt{3} + i)^9$$

értékét!

M $\sqrt{3} + i$ hossza $\sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$, trigonometriai alakja:

$$2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right).$$

$$\left[2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)\right]^9 = 2^9\left(\cos \frac{9\pi}{6} + i \sin \frac{9\pi}{6}\right) =$$

$$512\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right) = -512i$$

D Ha $z \in \mathbb{C}$ és $n \in \mathbb{N}^+$, akkor $\sqrt[n]{z} = \{w \in \mathbb{C} : w^n = z\}$, azaz a z komplex szám **komplex n -edik gyökén** azon w számok halmazát értjük, melyekre $w^n = z$. (Ez különbözik a **valós n -edik gyök** fogalmától!)

Á **(Hatványozás, gyökvonás trigonometriaian alakban)** Legyen $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Ekkor

$$z^{-1} = r^{-1}(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)) = r^{-1}(\cos \varphi - i \sin \varphi)$$

$$z^n = (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad n \in \mathbb{N}^+, k = 0, \dots, n-1,$$

ahol $\sqrt[n]{}$ a komplex, $\sqrt[n]{}$ a valós n -edik gyökvonás művelete.

B $L \ w = R(\cos \alpha + i \sin \alpha), z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

$$w^n = z \rightsquigarrow R^n(\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \rightsquigarrow$$

$$R = \sqrt[n]{r}, n\alpha = \varphi + 2k\pi \rightsquigarrow \alpha = \frac{1}{n}(\varphi + 2k\pi)$$

- $k = n$ esetén ugyanazt kapjuk, mint $k = 0$ esetén, $k = n + 1$ esetén ugyanazt, mint $k = 1$ esetén,...

- m** Egy nem nulla komplex szám n -edik gyökei szabályos n -szöget alkotnak.

- P** Határozzuk meg az összes olyan komplex számot, melynek hatodik hatványa 1. (Számítsuk ki az 1 hatodik gyökeit!)
- M** Az 1 trigonometriai alakja $1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$. Olyan számokat keresünk, melyek 6-odik hatványa 1, azaz olyanokat, melyekre $r^6(\cos 6\varphi + i \sin 6\varphi) = 1(\cos 0 + i \sin 0)$. Innen $r = 1$, és $6\varphi = 0$, de mivel 0 ugyanaz a szög, mint $2\pi, 4\pi, \dots$, ezért $6\varphi = 2\pi, 6\varphi = 4\pi, \dots, 6\varphi = 10\pi$ is lehet! ($6\varphi = 12\pi, 6\varphi = 14\pi, \dots$ nem ad új eredményt!) Így $\varphi = 0, \pi/3, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3, 5\pi/3$. A gyökök:

$$1(\cos 0 + i \sin 0) = 1,$$

$$1(\cos \pi/3 + i \sin \pi/3) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

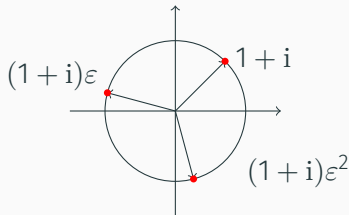
$$1(\cos 2\pi/3 + i \sin 2\pi/3) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$1(\cos \pi + i \sin \pi) = -1,$$

$$1(\cos 4\pi/3 + i \sin 4\pi/3) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$1(\cos 5\pi/3 + i \sin 5\pi/3) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Számítsuk ki a $-1 + i$ összes köbgyökét!



M $-2 + 2i = \sqrt{8}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$ harmadik gyökei $\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{2\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{2\pi}{3}))$, ahol $k = 0, 1, 2$, azaz $1 + i$, $(1 + i)\varepsilon$, $(1 + i)\varepsilon^2$, ahol $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ harmadik egységgyök.

Algebrai alakban az utolsó két gyök:

$$(1 + i)(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}) + (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})i$$

$$(1 + i)(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}) + (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2})i$$

Számolás komplex számokkal

Egységgyökök

D Az $\varepsilon \in \mathbb{C}$ n -edik **egységgyök** ($n \in \mathbb{N}^+$), ha $\varepsilon^n = 1$.

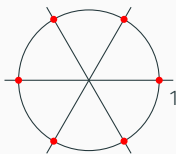
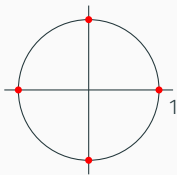
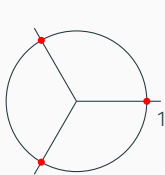
m $\cos(k\frac{2\pi}{n}) + i\sin(k\frac{2\pi}{n})$

2-dik egységgyökök: $1, -1$.

3-dik egységgyökök: $1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

4-dik egységgyökök: $1, i, -1, -i$.

6-dik egységgyökök: $1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.



A második egységgyökök egyúttal negyedek és hatodik, a harmadik egységgyökök egyúttal hatodik egységgyökök is.

Az algebra alaptétele

T Algebra alaptétele

Minden komplex-együtthatós n -edfokú ($n \geq 1$) polinomnak van komplex gyöke.

T Algebra alaptétele – változat

Minden komplex-együtthatós n -edfokú ($n \geq 1$) polinomnak – a gyököket multiplicitással számolva – pontosan n gyöke van. Azaz minden komplex-együtthatós polinom lineáris tényezők szorzatára bontható: az

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0, \quad a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$$

egyenlethez léteznek olyan $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ számok, hogy

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n (x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n),$$

és ez a felbontás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

Minden $a, b, c \in \mathbb{C}$ ($a \neq 0$) esetén az $az^2 + bz + c$ polinom $a(z - z_1)(z - z_2)$ alakra hozható, ahol (a komplex gyökvonás jelével)

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

B Mint a középiskolában:

$$\begin{aligned} & a(z - z_1)(z - z_2) \\ &= a \left(z - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(z - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \\ &= a \left(z^2 - z \left(\frac{-b + \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \right) + \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \right) \\ &= a \left(z^2 - z \frac{-2b}{2a} + \frac{4ac}{4a^2} \right) = az^2 + bz + c \end{aligned}$$

P Oldjuk meg az $iz^2 - iz + i + 1 = 0$ egyenletet!

M A megoldóképlettel:

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{i \pm \sqrt{-1 - 4i(i+1)}}{2i} \\ &= \frac{i \pm \sqrt{3 - 4i}}{2i} = \frac{i \pm (2 - i)}{2i} \\ &= \begin{cases} \frac{i+2-i}{2i} = \frac{1}{i} = -i \\ \frac{i-2+i}{2i} = \frac{i-1}{i} = -1 + i \end{cases} \end{aligned}$$

ahol $\sqrt{3 - 4i}$ kiszámításához:

$$(a + bi)^2 = 3 - 4i \rightsquigarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = -4 \end{cases} \rightsquigarrow a = -\frac{2}{b},$$

$b^4 - 3b^2 - 4 = 0 \rightsquigarrow b^2 = 1$ (vagy $b^2 = -4$ hamis gyök) $\rightsquigarrow b = 1$,
 $a = -2$, azaz $a + bi = \pm(2 - i)$.

Binomiális tétel

Binomiális együttható

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad n, k \in \mathbb{N}_0, k \leq n.$$

- $k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot k, 0! = 1$
- A $\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}$ képlet értelmezhető valós n esetén is:
- $\binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2})}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{16}$

Á A binomiális együttható alaptulajdonságai

$$1. \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$2. \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$3. \binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} \text{ és } \binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k} \binom{n}{k-1}$$

$$4. \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

B 1,2 : ✓, 3: $\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}$

$$4: \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} + \frac{n-k}{k+1} \binom{n}{k} = \left(1 + \frac{n-k}{k+1}\right) \binom{n}{k} = \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

F Gondoljuk végig kombinatorikai jelentésüket!

Pascal-háromszög:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

T

Binomiális tétel

Tetszőleges komplex a és b számokra és $n \in \mathbb{N}_0$ természetes számra

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \dots + b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

m Mivel a bizonyítás csak az a és b közti összeadás és szorzás műveleti tulajdonságait használja, ezért a tétel bármely egységelemes kommutatív R gyűrű elemeire igaz. (Pl.

$$R = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_m, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots)$$

P $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$

K $(1 + x)^n = \binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x^1 + \dots + \binom{n}{n}x^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}x^k.$

1B (kombinatorikai leszámolásal)

Számítsuk ki, hogy az $(a + b)(a + b) \dots (a + b)$ szorzatban mi $a^{n-k}b^k$ együtthatója.

Hányféleképp választható ki az n darab $(a + b)$ tényezőből k darab b és $n - k$ darab a ?

Összesen $\binom{n}{k}$.

2B (teljes indukció) $n = 0$: $1 = 1$ ✓

$$n \rightarrow n + 1 = : (a + b)^{n+1} = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right) (a + b)$$

Beszorzás után minden tagban a kitevők összege $n + 1$.

$a^{n+1-k}b^k$ kétszer szerepel:

$$\binom{n}{k} a^{n-k} b^k a + \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^{k-1} b = \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$$

$$\text{P} \quad 2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

$$\text{P} \quad 0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$$

$$\text{P} \quad (1+i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i$$

$$\text{P} \quad (1+i)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}i - \binom{n}{2} - \binom{n}{3}i + \dots$$

$$\text{Másképp } (1+i)^n = (\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right)$$

A két eredmény összehasonlításából:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots = (\sqrt{2})^n \cos \frac{n\pi}{4}$$

$$\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \dots = (\sqrt{2})^n \sin \frac{n\pi}{4}$$

Összefoglalás

- komplex számok algebrai és trigonometrikus alakja
- nevezetes szögek esetén konverzió a két alak közt
- algebrai alakban megadott komplex számok összeadása, kivonása, szorzása, osztása
- trigonometrikus alakban megadott komplex számok szorzása, osztása, hatványozása
- konjugált és abszolút érték tulajdonságai
- gyökvonás trigonometrikus alakban
- komplex egységgyökök
- az algebra alaptétele a komplex gyökök számáról
- binomiális együtthatók, és tulajdonságaik, Pascal-háromszög, binomiális-tétel