BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

Matematika A1a – Analízis

BMETE90AX00

A matematika alapjairól

StKis, EIC – 2019-02-06

Wettl Ferenc
ALGEBRA TANSZÉK

A matematikáról

- Ne bánkódj, ha gondjaid vannak a matematikával, biztosíthatlak, az enyémek sokkal nagyobbak. (Albert Einstein)
- A matematikában az ember nem megérti a dolgokat, hanem megszokja. (Neumann János)
- Hogy minden szellemi tevékenység között a számtani a legalsóbb rendű, annak az a bizonyítéka, hogy ez az egyedüli, amelyet géppel is el lehet végezni. (Arthur Schopenhauer)
- Mindig hittem a számokban, az egyenletekben és logikában, amely az okhoz vezet. De miután egy életen át ezt kutattam, azt kérdezem: mi a logika? Ki dönti el az okot? Kutatásom átvitt a fizikain, a metafizikain, káprázaton és vissza. És megtettem pályám legfontosabb, életem legfontosabb felfedezését. Csak a szerelem rejtélyes egyenleteiben lehet bármi logika vagy okozat. Csakis miattad vagyok itt ma! Te vagy az ok, amiért vagyok. Te vagy a magyarázat. Köszönöm! (John Forbes Nash)
- A matematikához nem vezet királyi út. (Euklidesz)

Matematikai kijelentések

A matematikai kijelentések olyan mondatok, amelyekben

- matematikai objektumok (pl. szám, halmaz, függvény,...) és
- logikai konnektívumok (pl. logikai műveletek: és, vagy, ha... akkor; kvantorok: minden, van olyan) szerepelnek.

Formalizálásukhoz tagoló jeleket (zárójeleket) is használunk.

Logikai műveletek

Logikai műveletek

Állítások tagadása

P

Példa

Mi az alábbi állítások tagadása?

- Esik az eső. E
-     Nem esik az eső. $\neg E$
- Esik az eső és süt a nap. $E \wedge S$ $(E \& S)$
-     Nem esik az eső vagy nem süt a nap. $\neg E \vee \neg S$
- Ma moziba megyünk vagy fagyizuk. $M \vee F$
-     Nem megyünk moziba és nem fagyizunk. $\neg M \wedge \neg F$
- Ha hétfőn nem futunk, (akkor) futunk kedden. $\neg H \Rightarrow K$
-     Hétfőn nem futunk de/és kedden sem. $\neg H \wedge \neg K$
- Ha hétfőn futunk, futunk kedden is. $H \Rightarrow K$
-     Hétfőn futunk de kedden nem. $H \wedge \neg K$

Logikai műveletek

És, vagy, ha... akkor, pontosan akkor, nem

D

Definíció

Jelöljön P és Q két állítást. Igazságtáblájukkal a következő logikai műveleteket definiáljuk ($0 =$ hamis, $1 =$ igaz):

- tagadás, negáció ($\neg$, „nem”, `NOT`),
- és, konjunkció, logikai szorzás ($\wedge$, &, „és/de”, `AND`),
- (megengedő) vagy, diszjunkció, l. összeadás ($\vee$, „vagy”, `OR`),
- kizáró vagy, összeadás modulo 2 ($\otimes$, „vagy…, vagy”, `XOR`),
- implikáció ($\Rightarrow$, „ha…, akkor…”),
- ekvivalencia ($\Leftrightarrow$, „pontosan akkor”, „akkor és csak akkor”),

P	$\neg P$
0	1
1	0

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \otimes Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
0	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1

D **Definíció**

Két logikai kifejezést azonosnak (azonosan egyenlőnek) tekintünk, ha logikai értékük a bennük szereplő logikai változók bármely értékére azonos. Az azonosság jele $\equiv$.

Ha nem futunk hétfőn, futunk kedden
$\equiv$ Hétfőn vagy kedden futunk.

P **Az implikáció ekvivalens alakja**

$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

A	$\Rightarrow$	B	$\equiv$	$\neg$	A	$\vee$	B
0	1	0	✓	1	0	1	0
0	1	1	✓	1	0	1	1
1	0	0	✓	0	1	0	0
1	1	1	✓	0	1	1	1

Nem igaz, hogy ha nem futunk hétfőn, futunk kedden
$\equiv$ Se hétfőn se kedden nem futunk.

P

Az implikáció tagadása

$\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$

$\neg$	$(A$	$\Rightarrow$	$B)$	$\equiv$	A	$\wedge$	$\neg$	B
0	0	1	0	✓	0	0	1	0
0	0	1	1	✓	0	0	0	1
1	1	0	0	✓	1	1	1	0
0	1	1	1	✓	1	0	0	1

Logikai műveletek

Implikáció megfordítása

D

Implikáció megfordítása

Az $A \Rightarrow B$ implikáció megfordításán a $B \Rightarrow A$ implikációt értjük.

P

Példa

Ha Béla orvoshoz megy, tiszta fehérneműt húz.
Ha Béla tiszta fehérneműt húz, orvoshoz megy.

P

Ekvivalencia

$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \equiv A \Leftrightarrow B.$

$(A$	$\Rightarrow$	$B)$	$\wedge$	$(B$	$\Rightarrow$	$A)$	$\equiv$	A	$\Leftrightarrow$	B
0	1	0	1	0	1	0	✓	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0	✓	0	0	1
1	0	0	0	0	1	1	✓	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	✓	1	1	1

Logikai műveletek

Szükséges és elegendő/elégséges

- Ha n osztható 4-gyel, akkor osztható 2-vel is.
  ha A, akkor B
  $\equiv$ A IGAZSÁGA elegendő (de nem szükséges) feltétele B IGAZSÁGÁNAK
  $\equiv$ B-nek A elegendő (de nem szükséges) feltétele
- Csak akkor osztható n 4-gyel, ha 2-vel is.
  csak akkor A, ha B
  $\equiv$ B az A-nak szükséges (de esetleg nem elegendő) feltétele
  $\equiv$ A-nak szükséges (de esetleg nem elegendő) feltétele B
- Matematikában a fenti két mondatszerkezet ekvivalens:
  A elegendő feltétele B-nek, és B szükséges feltétele A-nak.
  Nem matek: csak akkor kapsz diplomát, ha fizeted a tandíjat!
- A szükséges és elegendő feltétele B-nek, azaz $A \Leftrightarrow B$
  $\equiv$ csak akkor B, ha A (mert A szükséges, azaz $B \Rightarrow A$), és
  ha A, akkor B (mert A elégséges, azaz $A \Rightarrow B$).
  $\equiv$ akkor és csak akkor A, ha B
  $\equiv$ pontosan akkor A, ha B $\equiv$ (A pontosan akkor, ha B)

Logikai műveletek

Kontrapozíció

P

Példa

Mutassuk meg, hogy ha m és n olyan pozitív egészek, hogy $m + n \geq 49$, akkor $m \geq 25$ vagy $n \geq 25$.

P

Kontrapozíció

$A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$

A	$\Rightarrow$	B	$\equiv$	$\neg$	B	$\Rightarrow$	$\neg$	A
0	1	0	✓	1	0	1	1	0
0	1	1	✓	0	1	1	1	0
1	0	0	✓	1	0	0	0	1
1	1	1	✓	0	1	1	0	1

Logikai műveletek

de Morgan azonosságok

P

de Morgan azonosságok

$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$ $\qquad$ $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

$\neg$	$(A$	$\wedge$	$B)$	$\equiv$	$\neg$	A	$\vee$	$\neg$	B
1	0	0	0	✓	1	0	1	1	0
1	0	0	1	✓	1	0	1	0	1
1	1	0	0	✓	0	1	1	1	0
0	1	1	1	✓	0	1	0	0	1

$\neg$	$(A$	$\vee$	$B)$	$\equiv$	$\neg$	A	$\wedge$	$\neg$	B
1	0	0	0	✓	1	0	1	1	0
0	0	1	1	✓	1	0	0	0	1
0	1	1	0	✓	0	1	0	1	0
0	1	1	1	✓	0	1	0	0	1

Kvantorok (minden..., van olyan...)

m A $\forall x P(x)$ és a $\exists x P(x)$ jelölések jelentése: „minden x-re (igaz, hogy) $P(x)$" és „van olyan x, hogy $P(x)$". A $\forall$ ill. a $\exists$ jel neve univerzális ill. egzisztenciális kvantor.

$\forall$: „minden", „tetszőleges", „bármely", „akármelyik", „bármikor"...

$\exists$: „van", „van olyan", „létezik", „található olyan", „megesik"...

P **Példa**

Jelölje $P(x)$, hogy x prím, $S(x)$, hogy x páros és $O(x,y)$, hogy x osztója y-nak. Formalizáljuk az alábbi állításokat, és döntsük el, hogy igazak-e!

- Létezik páros prím.	$\exists x[S(x) \wedge P(x)]$	igaz
- Minden prím páratlan.	$\forall x[P(x) \Rightarrow \neg S(x)]$	hamis
- Ha x és y osztója z-nek, akkor xy is.	$\forall x \forall y \forall z[O(x,z) \wedge O(y,z) \Rightarrow O(xy,z)]$	hamis

P

Példa

Mi az alábbi állítások tagadása?

- Mindenki szereti Júliát. $\forall x \in J\,[S(x)]$
- Van aki nem szereti. $\exists x \in J\,[\neg S(x)]$
- Valaki járt itt. $\exists x \in E\,[I(x)]$
- Senki sem járt itt. $\forall x \in E\,[\neg I(x)]$
- Minden ajtón van kilincs. $\forall a \in A\,\exists k \in K\,[R(a,k)]$
- Van olyan ajtó, amin nincs kilincs. $\exists a \in A\,\forall k \in K\,[\neg R(a,k)]$

T

Kvantoros állítások tagadása

$\forall x \forall y \exists z \ldots\,[A(x,y,z,\ldots)]$ tagadása $\exists x \exists y \forall z \ldots\,[\neg A(x,y,z,\ldots)]$.

Halmaz- és logikai műveletek

Halmaz- és logikai műveletek

Halmazok

D

Definíció

Két halmazt akkor és csak akkor tekintünk egyenlőnek, ha elemeik ugyanazok. A halmazt, melynek nincs eleme, üres halmaznak nevezzük. Jele: $\emptyset$. Az „x dolog eleme az X halmaznak” jelölése: $x \in X$.

Az A halmazt a B halmaz részhalmazának nevezzük ($A \subseteq B$), ha az A minden eleme B-nek is eleme. A valódi része B-nek ($A \subset B$), ha $A \subseteq B$, de $A \neq B$.

Halmazokról mindig csak mint egy adott (de esetleg nem megnevezett) alaphalmaz részhalmazairól beszélünk.

Jelölés

$\mathbb{R}$: valósok,

$\mathbb{N}$: természetes számok,

$\mathbb{Z}$: egészek,

$\mathbb{Q}$: racionálisok,

$\mathbb{N}^+$: pozitív egészek,

$\mathbb{R}^+$: pozitív valós számok.

A H halmaz azon x elemeinek halmazát, melyek a P tulajdonsággal rendelkeznek a következőképp adjuk meg:

$$\{\, x \in H : P(x) \,\} \text{ vagy } \{\, x \in H \mid P(x) \,\}.$$

Halmaz- és logikai műveletek

Halmazműveletek

D

Halmazműveletek

Legyen A és B egy H halmaz két részhalmaza. Az A és B halmaz $A \cap B$ metszetén (közös részén) azoknak az elemeknek a halmazát értjük, amelyek mindkét halmazban benne vannak:

$$A \cap B = \{ x \in H : x \in A \wedge x \in B \}.$$

$A \cup B$ egyesítettjén (unióján) azoknak az elemeknek a halmazát értjük, amelyek a két halmaz közül legalább az egyikben benne vannak:

$$A \cup B = \{ x \in H : x \in A \vee x \in B \}.$$

D

Halmazműveletek (folytatás)

Az A és B halmaz $A \setminus B$ (másképpen $A - B$) különbségén az A összes olyan elemének halmazát értjük, amelyek nincsenek benne B-ben.

$$A \setminus B = \{\, x \in H : x \in A \wedge x \notin B \,\}.$$

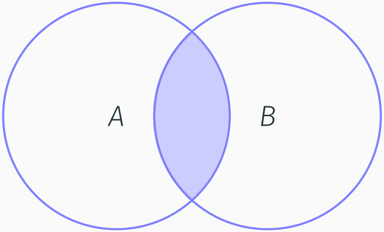
Az A halmaz H-ra vonatkozó komplementerén a $H \setminus A$ halmazt értjük. Jele $\overline{A}_H$. Ha az alaphalmaz nincs megnevezve, a komplementert egyszerűen $\overline{A}$ jelöli.

$$\overline{A}_H = \{\, x \in H : x \notin A \,\}.$$

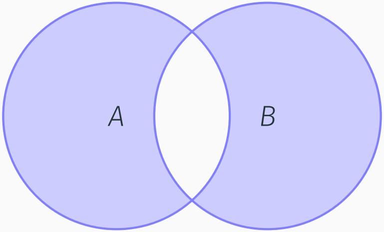
Az A halmaz $\mathcal{P}(A)$ hatványhalmazán azt a halmazt értjük, melynek elemei A részhalmazai (beleértve az üreshalmazt is).

$$\mathcal{P}(A) = \{\, B : B \subseteq A \,\}.$$

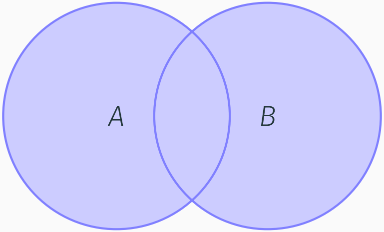
$A \cap B$



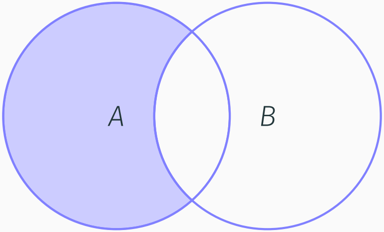
$\overline{A \cap B}$



$A \cup B$



$A \setminus B$



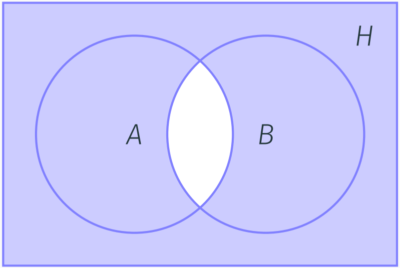
Halmaz- és logikai műveletek

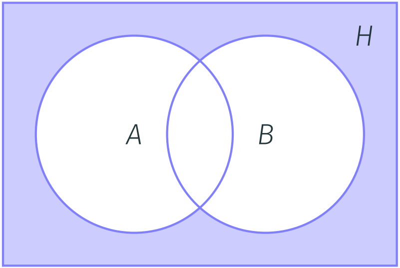
Halmazműveleti azonosságok

A halmazműveletek tulajdonságai:

- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ asszociativitás
- $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ kommutativitás
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ disztributivitás
- $A \cup A = A,\ A \cap A = A$ idempotencia
- $A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$ elnyelési tulajdonság
- $A \cup \emptyset = A,\ A \cap \emptyset = \emptyset,\ A \cup H = H,\ A \cap H = A$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ de Morgan azonosságok

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\qquad$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$





Halmaz- és logikai műveletek

Végtelen halmazok

D

Halmazok számossága

Két halmaz azonos számosságú, ha elemeik közt létezik kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés.

Van egy szálloda végtelen sok egyágyas szobával (a szobaszámok a pozitív egészek). Minden szoba foglalt

- Érkezik egy új vendég.

```
Régi vendégek:  2  3  4  5  6  7  8  9…
Új vendég:  1
```

- Egy busz érkezik, végtelen sok (1., 2., 3.,…) vendéggel

```
Régi vendégek:  2  4  6  8 10 12 …
Új vendégek:    1  3  5  7  9 11 …
```

- Végtelen sok (1., 2., …) busz érkezik, mindegyik végtelen sok vendéggel

```
Régiek:   1  2  4  7 11 16 22 …
1. busz:  3  5  8 12 17 23 …
2. busz:  6  9 13 18 24 …
3. busz: 10 14 19 25 …
4. busz: 15 20 26 …
  ⋮
```

D **Megszámlálhatóan végtelen halmaz**

Egy halmazt megszámlálhatóan végtelennek nevezünk, ha egyenlő számosságú az $\mathbb{N}$ halmazzal.

T **Az egészek és a racionálisok számossága**

Az egész számok és a racionális számok halmaza is megszámlálhatóan végtelen.

T **A valósok számossága**

A valós számok (és az irracionális számok) halmaza nem megszámlálható (számosságukat kontinuumnak nevezzük).

B Indirekt bizonyítás. Tegyük fel, hogy a valósak egy végtelen sorozatba rendezhetők, pl.

```
1     0,3610513769310776034...
2     3,1159236543282345014...
3     0,1585026723823654328...
4     2,6748231345822345014...
5     7,5748700000000000000...
6    -0,6548727650234576800...
7    -5,2687623176577653234...
8     0,9870244807633333777...
9     0,1113554322346000214...
⋮
```

Vegyünk egy számot, amelynek az n. tizedesjegye különbözik az n. szám n. tizedesjegyétől, 0-tól és 9-től is minden n-re, pl. `0,523315111` … Ez a szám nincs a sorozatban. ↯

Összefoglalás

Összefoglalás a tudnivalókról

1. logikai műveletek műveleti tábláinak ismerete,
2. alapazonosságok igazolása igazságtáblával:
   $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$, $\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$ (implikáció tagadása),
   $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \equiv A \Leftrightarrow B$,
   $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$ (kontrapozíció),
   $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$, $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ (de Morgan).
3. logikai műveleteket és/vagy kvantorokat tartalmazó állítások tagadása,
4. halmazműveletek definíciói, a műveleti tulajdonságok használata,
5. a természetes számok, a racionális, az irracionális és a valós számok számossága.