

1. Számítsuk ki az alábbi integrálokat parciális integrálással!

a) $\int \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx$

b) $\int \ln^2 x dx$

c) $\int e^{2x} \cos 3x dx$

d) $\int \sin x \cos 5x dx$

e) $\int \operatorname{sh} x \sin x dx$

2. Trigonometrikus vagy hiperbolikus helyettesítéssel számítsuk ki a következő integrálokat!

a) $\int \sqrt{x^2 + 4} dx$

b) $\int_1^5 \sqrt{15 + 2x - x^2} dx$

3. Milyen alakú elemi törtfüggvényekre lehet felbontani az alábbi racionális törtfüggvényeket?

a) $\frac{x^2 + 3}{(x + 1)^2(x - 3)}$

b) $\frac{x + 2}{x(x^2 + 2x + 2)^2}$

c) $\frac{1}{(x^2 - 9)^2}$

4. Bontsuk fel a következő racionális törtfüggvényeket polinom és elemi törtfüggvények összegére, aztán számítsuk ki az integráljukat!

a) $\frac{x^3 + 3x^2 - x + 2}{x^4 + x^2}$

b) $\frac{x^3 - 2x + 1}{(x + 1)^3}$

c) $\frac{5x + 3}{x^2 - 4x + 5} dx$

5. Számítsuk ki a következő integrálokat!

a) $\int e^{x-2} \operatorname{ch}(3x + 1) dx$

b) $\int \ln \frac{x^3}{x + 1} dx$

c) $\int_0^\infty x^3 e^{-x^2} dx$

d) $\int \sqrt{x^2 + 2x} dx$

e) $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1 + x^2}} dx$

f) $\int \frac{x^4 - x + 3}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$

g) $\int \frac{\ln(1 + x)}{x^2} dx$

Megoldások

1. A parciális integrálásnál aláhúzás jelöli, hogy az új integrálban melyik tényezőnek fog a deriváltja szerepelni, míg a másiknak a primitív függvénye.

$$\text{a) } \int \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx = \int 1 \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \int x \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \int \frac{x}{x^2 + 1} dx = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$$

$$\text{b) } \int \ln^2 x dx = \int 1 \cdot \ln^2 x dx = x \ln^2 x - \int x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln^2 x - \int 2 \cdot \ln x dx = x \ln^2 x - 2x \ln x + \int 2x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C$$

$$\text{c) } \int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x - \int \frac{1}{2} e^{2x} (-3 \sin 3x) dx = \frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{2} \int e^{2x} \sin 3x dx = \frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{4} e^{2x} \sin 3x - \frac{3}{2} \int \frac{1}{2} e^{2x} 3 \cos 3x dx. \text{ Ebből}$$

az ismeretlen $I = \int e^{2x} \cos 3x dx$ integrálra az $I = \frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{4} e^{2x} \sin 3x - \frac{9}{4} I$ egyen-

letet kapjuk. Így $I = \frac{2}{13} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{13} e^{2x} \sin 3x + C$. (Más megoldás: Tudjuk, hogy $e^{ax} \cos(bx)$ -nek (és $e^{ax} \sin(bx)$ -nek is) van $Ae^{ax} \cos(bx) + Be^{ax} \sin(bx)$ alakú primitív függvénye valamely $A, B \in \mathbb{R}$ együtthatókkal. Ha ezt a függvényt lederiváljuk és összehasonlítjuk az integrandussal, akkor két kétváltozós lineáris egyenletet kapunk az A, B ismeretlenekre, és ebből az A és B együtthatókat kiszámíthatjuk. Ebben az esetben az $(Ae^{2x} \cos 3x + Be^{2x} \sin 3x)' = e^{2x} \cos 3x$ egyenlőségből

$(2A + 3B)e^{2x} \cos 3x + (-3A + 2B)e^{2x} \sin 3x = e^{2x} \cos 3x$ adódik, tehát $2A + 3B = 1$, és $-3A + 2B = 0$, amiből $A = \frac{2}{13}$ és $B = \frac{3}{13}$.)

$$\text{d) } \text{A c)-hez hasonló módon parciális integrálással is kiszámíthatjuk vagy a } \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \text{ trigonometrikus összefüggés segítségével átalakíthatjuk az integrált: } \int \sin x \cos 5x dx = \int \frac{1}{2} \sin(6x) + \frac{1}{2} \sin(-4x) dx = \int \frac{1}{2} \sin(6x) - \frac{1}{2} \sin(4x) dx = -\frac{1}{12} \cos(6x) + \frac{1}{8} \cos(4x) + C.$$

$$\text{e) } \int \operatorname{sh} x \sin x dx = \operatorname{ch} x \sin x - \int \operatorname{ch} x \cos x dx = \operatorname{ch} x \sin x - \operatorname{sh} x \cos x - \int \operatorname{sh} x \sin x dx, \text{ tehát } I = \int \operatorname{sh} x \sin x dx \text{-re } I = \operatorname{ch} x \sin x - \operatorname{sh} x \cos x - I, \text{ azaz } \int \operatorname{sh} x \sin x dx = \frac{1}{2} \operatorname{ch} x \sin x - \frac{1}{2} \operatorname{sh} x \cos x + C.$$

2. a) $\sqrt{x^2 + 4} = 2\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1}$, így érdemes az $\frac{x}{2} = \operatorname{sh} u$, azaz $x = 2 \operatorname{sh} u$, $dx = 2 \operatorname{ch} u du$ helyettesítést elvégezni: $\int \sqrt{x^2 + 4} dx = \int 2\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 u} \cdot 2 \operatorname{ch} u du = \int 4 \operatorname{ch}^2 u du = \int 2(\operatorname{ch} 2u + 1) du = \operatorname{sh} 2u + 2u + C = \operatorname{sh} \left(2 \operatorname{arsh} \frac{x}{2}\right) + 2 \operatorname{arsh} \frac{x}{2} + C = 2 \operatorname{sh} \left(\operatorname{arsh} \frac{x}{2}\right) \operatorname{ch} \left(\operatorname{arsh} \frac{x}{2}\right) + 2 \operatorname{arsh} \frac{x}{2} + C = x \sqrt{1 + \frac{x^2}{4}} + 2 \operatorname{arsh} \frac{x}{2} + C =$
- b) $\sqrt{15 + 2x - x^2} = \sqrt{15 - (x^2 - 2x)} = \sqrt{16 - (x - 1)^2} = 4\sqrt{1 - \left(\frac{x-1}{4}\right)^2}$, így az $\frac{x-1}{4} = \sin u$, azaz $x = 1 + 4 \sin u$, $dx = 4 \cos u du$ ($u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) helyettesítést alkalmazzuk:

$$\int_1^5 \sqrt{15+2x-x^2} dx = \int_0^{\pi/2} 4\sqrt{1-\sin^2 u} 4\cos u du = \int_0^{\pi/2} 16\cos^2 u du =$$

$$\int_0^{\pi/2} 8 + 8\cos 2u du = [8u + 4\sin 2u]_0^{\pi/2} = 4\pi. \quad (\text{Az integrálás új határait az } x=1 \Rightarrow u = \arcsin \frac{x-1}{4} = \arcsin 0 = 0 \text{ és } x=5 \Rightarrow u = \arcsin \frac{x-1}{4} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \text{ összefüggésekből kaptuk.})$$

3. a) $\frac{x^2+3}{(x+1)^2(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-3}$

b) $\frac{x+2}{x(x^2+2x+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2} + \frac{Dx+E}{(x^2+2x+2)^2}$

c) $\frac{1}{(x^2-9)^2} = \frac{1}{(x-3)^2(x+3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{x+3} + \frac{D}{(x+3)^2}$

4. a) $\frac{x^3+3x^2-x+2}{x^4+x^2} = \frac{x^3+3x^2-x+2}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} =$

$$\frac{A(x^3+x) + B(x^2+1) + (Cx+D)x^2}{x^2(x^2+1)} = \frac{(A+C)x^3 + (B+D)x^2 + Ax + B}{x^2(x^2+1)}. \quad \text{Az } x\text{-}$$

hatványok együtthatóit összehasonlítva azt kapjuk, hogy

$$A + C = 1$$

$$B + D = 3$$

$$A = -1$$

$$B = 2.$$

Ebből a paraméterek értéke: $A = -1$, $B = 2$, $C = 2$ és $D = 1$, az integrál pedig:

$$\int -\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2x+1}{x^2+1} dx = \int -\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} dx =$$

$$-\ln|x| - \frac{2}{x} + \ln(x^2+1) + \arctg x + C.$$

b) $\int \frac{x^3-2x+1}{(x+1)^3} dx = \int 1 - \frac{3}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^3} dx = x - 3\ln(x+1) - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} + C.$ (A parciális törtök együtthatóit megkaphatjuk az a) részben ismertetett módon, vagy pedig a számlálót többszörösen eloszthatjuk maradékosan $(x+1)$ -gyel, akkor a maradékok rendre az $(x+1)^{-3}$, $(x+1)^{-2}$ és $(x+1)^{-1}$ együtthatóit, az utolsó hányados pedig a polinomot adja.)

c) A nevező $\mathbb{R}$ fölött felbonthatatlan másodfokú polinom, tehát az integrandus eleve elemi törtfüggvény. A nevező deriváltja $2x-4$, és ennek alapján az integrál kiszámításához tovább bontjuk a számlálót: $\frac{5x+3}{x^2-4x+5} = \frac{5}{2}(2x-4) + \frac{13}{x^2-4x+5} =$

$$\frac{5}{2} \cdot \frac{2x-4}{x^2-4x+5} + \frac{13}{(x-2)^2+1}, \text{ tehát}$$

$$\int \frac{5x+3}{x^2-4x+5} = \frac{5}{2} \ln(x^2-4x+5) + 13 \arctg(x-2) + C.$$

5. a) $\int e^{x-2} \operatorname{ch}(3x+1) dx = \int e^{x-2} \left(\frac{1}{2}e^{3x+1} + \frac{1}{2}e^{-3x-1} \right) dx = \int \frac{1}{2}e^{4x-1} + \frac{1}{2}e^{-2x-3} dx =$

$$\frac{1}{8}e^{4x-1} - \frac{1}{4}e^{-2x-3} + C$$

- b) $\int \ln \frac{x^3}{x+1} dx = \int 3 \ln x - \ln(x+1) dx = 3x \ln x - 3x - (x+1) \ln(x+1) + (x+1) + C$,
 ugyanis $\int 1 \cdot \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C$. Az integrandus felbontása
 csak $x > 0$ -ra működik, bár az eredeti függvény $x < -1$ -re is értelmezve van. Viszont
 az eredmény egyszerűen általánosítható arra a tartományra is: $3x \ln |x| - 3x - (x+1) \ln |x+1| + (x+1) + C$.
- c) $u = x^2$, $du = 2x dx$ helyettesítéssel: $\int x^3 e^{-x^2} dx = \int \frac{1}{2} u \underline{e^{-u}} du = \frac{1}{2} u(-e^{-u}) -$
 $\int \frac{1}{2} (-e^{-u}) du = -\frac{1}{2} (u+1) e^{-u} + C = -\frac{1}{2} (x^2+1) e^{-x^2} + C$, és ebből az im-
 proprius integrál $\int_0^\infty x^3 e^{-x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} (x^2+1) e^{-x^2} \right]_0^b = \frac{1}{2} - \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b^2+1}{2e^{b^2}} =$
 $\frac{1}{2} - \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{2b}{4be^{b^2}} = \frac{1}{2} - \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2e^{b^2}} = \frac{1}{2}$.
- d) $x^2+2x = (x+1)^2-1$, így az $x+1 = \operatorname{ch} u$ ($u \geq 0$), $dx = \operatorname{sh} u du$ helyettesítést érdemes
 alkalmazni:
 $\int \sqrt{x^2+2x} dx = \int \sqrt{\operatorname{ch}^2 u - 1} \operatorname{sh} u du = \int \operatorname{sh}^2 u du = \int \frac{1}{2} \operatorname{ch}(2u) - \frac{1}{2} du =$
 $\frac{1}{4} \operatorname{sh}(2u) - \frac{1}{2} u + C = \frac{1}{4} \operatorname{sh}(2 \operatorname{arch}(x+1)) - \frac{1}{2} \operatorname{arch}(x+1) + C =$
 $\frac{1}{2} (x+1) \sqrt{x^2+2x} - \frac{1}{2} \operatorname{arch}(x+1) + C$
- e) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \operatorname{arctg} x dx = \sqrt{1+x^2} \operatorname{arctg} x - \int \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx =$
 $\sqrt{1+x^2} \operatorname{arctg} x - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{1+x^2} \operatorname{arctg} x - \operatorname{arsh} x + C$
- f) $\int \frac{x^4-x+3}{x^3-2x^2-x+2} dx = \int x+2 + \frac{5x^2-x-1}{(x-1)(x+1)(x-2)} dx = \int x+2 - \frac{3/2}{x-1} +$
 $\frac{5/6}{x+1} + \frac{17/3}{x-2} dx = \frac{1}{2} x^2 + 2x - \frac{3}{2} \ln |x-1| + \frac{5}{6} \ln |x+1| + \frac{17}{3} \ln |x-2| + C$ (Mivel
 a nevező csupa különböző lineáris tényezőből áll, a parciális törtek együtthatóit a
 letakarásos módszerrel is kiszámíthatjuk: $\frac{1}{x-1}$ együtthatója $\frac{5x^2-x-1}{(x+1)(x-2)}|_{x=1} = -\frac{3}{2}$,
 $\frac{1}{x+1}$ együtthatója $\frac{5x^2-x-1}{(x-1)(x-2)}|_{x=-1} = \frac{5}{6}$, és $\frac{1}{x-2}$ együtthatója $\frac{5x^2-x-1}{(x-1)(x+1)}|_{x=2} = \frac{17}{3}$.)
- g) $\int \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx = \int \frac{1}{x^2} \cdot \ln(1+x) dx = -\frac{1}{x} \ln(x+1) + \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x+1} dx =$
 $-\frac{1}{x} \ln(x+1) + \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} dx = -\frac{1}{x} \ln(x+1) + \ln |x| - \ln(x+1) + C$