**1.** Osszuk el maradékosan az $f(x)$ polinomot $g(x)$-szel, ha
a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 1$, és $g(x) = x^2 + x$;
b) $f(x) = x^4 - 5x^2 - x + 2$, és $g(x) = 2x^3 + x - 1$;
c) $f(x) = 3x^3 + x + 2$, és $g(x) = x - 2$.

**2.** A Horner-módszer alkalmazásával számítsuk ki a következőket:
a) $f(x) = x^4 - 5x^2 - x + 2$ maradékos osztása $(x + 2)$-vel;
b) $f(3)$ értéke, ha $f(x) = x^6 - 4x^5 - x^4 + 10x^3 + 5x + 2$;
c) $x^5 - 2x^2 + x + 1$ maradékos osztása $(x^2 - 1)$-gyel (a Horner-módszert kétszer alkalmazva: $(x - 1)$-gyel, és a hányadosra $(x + 1)$-gyel).

**3.** A racionális gyökteszt szerint melyik racionális számok közül kerülnek ki az $f(x) = 3x^5 - 2x^4 + x^2 - 3x + 6$ polinom racionális gyökei, ha egyáltalán vannak ilyenek?

**4.** Keressük meg a következő polinomok összes gyökét $\mathbb{C}$-ben:
a) $x^4 - 3x^3 + x^2 + 4$;
b) $2x^5 - x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 6x + 3$.

**5.** Számítsuk ki az alábbi függvényértékeket!
a) $\operatorname{sh} 1 + \operatorname{ch} 1$ b) $\operatorname{arsh} 2$ c) $\operatorname{th}(\ln 5)$ d) $\operatorname{th}(\operatorname{arsh}(-3))$

**6.** Határozzuk meg a következő függvények értelmezési tartományát és deriváltját!
a) $\operatorname{sh}(\arccos x)$ b) $e^x \operatorname{ch} x$ c) $\operatorname{arch} x^3$

**7.** Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényekre!
a) $(x^2 - 1)^2$ b) $\sqrt[3]{1 - x^3}$ c) $\dfrac{\ln x}{x}$ d) $\operatorname{arctg}(1 + \frac{1}{x})$ e) $\operatorname{arch}(\frac{1}{x} - 1)$

## Megoldások

**1.** a) $x^3+3x^2-x+1=(x^2+x)(x+2)+(-3x+1)$
b) $x^4-5x^2-x+2=(2x^3+x-1)\frac{1}{2}x+(-\frac{11}{2}x^2-\frac{1}{2}x+2)$
c) $3x^3+x+2=(x-2)(3x^2+6x+13)+28$

**2.** a)

| | 1 | 0 | $-5$ | $-1$ | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $-2$ | 1 | $-2$ | $-1$ | 1 | 0 |

$x^4-5x^2-x+2=(x+2)(x^3-2x^2-x+1)+0$

b)

| | 1 | $-4$ | $-1$ | 10 | 0 | 5 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | $-1$ | $-4$ | $-2$ | $-6$ | $-13$ | $-37$ |

$x^6-4x^5-x^4+10x^3+5x+2=(x-3)(x^5-x^4-4x^3-2x^2-6x-13)+(-37)$, és ebből $f(3)=-37$.

c)

| | 1 | 0 | 0 | $-2$ | 1 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | $-1$ | 0 | 1 |
| $-1$ | 1 | 0 | 1 | $-2$ | 2 | |

$x^5-2x^2+x+1=(x-1)(x^4+x^3+x^2-x)+1=(x-1)((x+1)(x^3+x-2)+2)+1=(x-1)(x+1)(x^3+x-2)+(x-1)2+1=(x^2-1)(x^3+x-2)+(2x-1)$

**3.** Csak olyan racionális számok lehetnek gyökei, amelynek egyszerűsített $\frac{p}{q}$ alakjában $p$ osztója 6-nak (tehát $p=\pm1,\pm2,\pm3\pm6$), és $q$ osztója 3-nak (tehát $q=1,3$). Így $\frac{p}{q}=\pm1,\pm2,\pm3,\pm6,\pm\frac{1}{3},\pm\frac{2}{3}$.

**4.** a) $x^4-3x^3+x^2+4$ lehetséges racionális gyökei a racionális gyökteszt szerint $\pm1,\pm2,\pm4$, de látható, hogy negatív helyen a függvény értéke pozitív, továbbá az 1 nem gyöke (az együtthatók összege nem 0), így először az $(x-2)$-t próbáljuk kiemelni Horner-módszerrel, és kiderül, hogy az valóban osztója a polinomnak, sőt a hányadosnak is: $x^4-3x^3+x^2+4=(x-2)^2(x^2+x+1)$, így a polinom gyökei 2, és $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$.
b) A polinom lehetséges racionális gyökei $\pm1,\pm3,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{3}{2}$. A Horner-módszerrel behelyettesítve, és leosztva azt kapjuk, hogy $2x^5-x^4+4x^3-2x^2-6x+3=(x-1)(x+1)(x-\frac{1}{2})(2x^2+6)$, tehát a gyökök $1,-1,\frac{1}{2},\pm\sqrt{3}i$.

**5.** a) $\operatorname{sh}1+\operatorname{ch}1=\dfrac{e-\frac{1}{e}}{2}+\dfrac{e+\frac{1}{e}}{2}=e.$
b) $\operatorname{arsh}2=x$, ha $\operatorname{sh}x=2$, azaz $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=2$. Az $e^{-x}$-et $\frac{1}{e^x}$-ként írva, és az egyenletet átrendezve $e^x$-re egy másodfokú egyenletet kapunk: $(e^x)^2-4e^x-1=0$, amiből $e^x=2\pm\sqrt{5}$. De $e^x>0$ miatt ebből csak a pozitív a jó megoldás, így $x=\ln(2+\sqrt{5})$, azaz $\operatorname{arsh}2=\ln(2+\sqrt{5})$.
c) $\operatorname{th}(\ln 5)=\dfrac{\operatorname{sh}\ln 5}{\operatorname{ch}\ln 5}=\dfrac{(e^{\ln 5}-e^{-\ln 5})/2}{(e^{\ln 5}+e^{-\ln 5})/2}=\dfrac{5-\frac{1}{5}}{5+\frac{1}{5}}=\dfrac{12}{13}.$