1. Határozzuk meg az alábbi függvények inverzét! Ha a függvény nem invertálható a teljes értelmezési tartományán, akkor keressünk olyan maximális részintervallumot, amelyen már invertálható! Ábrázoljuk a függvényt és az inverzét!

a) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ b) $f(x) = x^2 - 6x + 8$ c) $f(x) = \sqrt{x-5}$

2. Számítsuk ki:

a) $\arcsin \sin \dfrac{10\pi}{3}$ b) $\cos \operatorname{arctg} 5$ c) $\cos \arcsin x$

3. Ábrázoljuk a $\sin(\arcsin x)$ és $\arcsin(\sin x)$ függvényeket.

4. Fejezzük ki az $\ln x$ és e^x függvények segítségével:

a) 5^x b) $\log_3 10$ c) $3^{\ln x}$ d) $x^{\sqrt{x}}$

5. a) Tegyük fel, hogy g az f függvény inverze, és tudjuk, hogy $f(3) = 1$ és $f'(3) = 5$. Melyik pontjában tudjuk megadni ennek alapján a g függvény deriváltját? Mi ennek a deriváltnak az értéke?

b) Legyen $f(x) = 2x^5 + x^3 + 1$. Bizonyítsuk be, hogy az $f(x)$ függvény invertálható! Ha g az f inverze, határozzuk meg a $g'(4)$ értékét!

6. Határozzuk meg az alábbi függvények deriváltjait.

a) $\arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ b) $\ln \operatorname{arctg} x$ c) $\arcsin \sin x$ d) $\cos \arcsin x$

7. Határozzuk meg az alábbi implicit módon megadott $x \mapsto y(x)$ függvények deriváltjait.

a) $y^2x + 3xy^3 - x = 3, \;\; y'(x) = ?$
b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1, \;\; y'(2) = ?, \;\; y''(2) = ?$
c) $y^3 = x - y, \;\; y'(x) = ?, \;\; y''(x) = ?$

8. Határozzuk meg az alábbi paraméteresen megadott $x \mapsto y$ függvények x szerinti első deriváltjait, és írjuk fel az érintő egyenletét a megadott pontokban.

a) $x = 3t^2, \;\; y = 2t^3, \;\; t_0 = 3$
b) $x = 3 \operatorname{tg} t - 1, \;\; y = \dfrac{5}{\cos t} + 2, \;\; t_0 = \dfrac{\pi}{4}$
c) $x = 4t + t^2, \;\; y = 2t^2, \;\; t_0 = 1.$

Megoldások

1. a) f invertálható az egész értelmezési tartományán, $\mathbb{R}\setminus\{1\}$-en, és inverze önmaga, ugyanis $y = \dfrac{x}{x-1} \Leftrightarrow x = \dfrac{y}{y-1}$.

b) $f(x) = x^2 - 6x + 8 = (x-3)^2 - 1$ parabola, amely $(-\infty, 3]$-on fogyó, $[3, +\infty)$-en növő. Szorítsuk meg f-et $[3, +\infty)$-re (azaz az inverz függvény kiszámításánál a két lehetséges ősképből közül a nagyobbikat válasszuk)! $y = (x-3)^2 - 1 \Leftrightarrow x - 3 = \pm\sqrt{y+1} \Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{y+1}$, tehát a nagyobbik megoldás $x = 3 + \sqrt{y+1}$. Így az inverz függvény $g(y) = 3 + \sqrt{y+1}$, vagy x változóval fölírva $g(x) = 3 + \sqrt{x+1}$, amely f (megszorítottjának) értékkészletén, $[-1, +\infty)$-n van értelmezve.

c) f szigorúan monoton növő az értelmezési tartományán, $[5, +\infty)$-en, tehát invertálható is. $y = \sqrt{x-5} \Rightarrow x = 5 + y^2$, tehát az inverz függvény $g(y) = 5 + y^2$, azaz $g(x) = 5 + x^2$ az f értékkészletére, azaz $[0, +\infty)$-re megszorítva.

2. a) $\arcsin\sin\frac{10\pi}{3} = \alpha$, ahol $\sin\alpha = \sin\frac{10\pi}{3}$, és $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Mivel $\sin\frac{10\pi}{3} = \sin\frac{4\pi}{3} = \sin(\pi - \frac{4\pi}{3}) = \sin(-\frac{\pi}{3})$, és $-\frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, azt kapjuk, hogy $\arcsin\sin\frac{10\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$.

b) $\alpha = \operatorname{arctg} 5 \in (0, \frac{\pi}{2})$, tehát α egy derékszögű háromszög egyik szöge, amelynek befogói 5 és 1 hosszúak (az α-val szemközti 5). Ennek a háromszögnek az átfogója $\sqrt{26}$, így $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$.

c) Azt tudjuk, hogy $\sin(\arcsin x) = x$, a koszinuszt pedig kifejezhetjük a szinusszal: általában $\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$, de $\alpha = \arcsin x$-re $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, így $\cos\alpha \geq 0$, tehát erre $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$, és ebből $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2}$.

3. Az arcsin függvény $[-1, 1]$-ből $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$-be képez, így $g(x) = \sin(\arcsin x)$ értelmezési tartománya $[-1, 1]$, és ezen a g függvény az arcsin függvény definíciójából adódóan megegyezik az $y = x$ függvénnyel.

Az $h(x) = \arcsin\sin x$ függvény minden x-hez az x-szel azonos szinuszú, $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ közötti számot rendeli. Ez azt jelenti, hogy ha $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ (valamely k egész számra), akkor $h(x) = x - 2\pi$, ha pedig $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$, akkor $h(x) = (2k+1)\pi - x$. Vagyis h grafikonja 1 és -1 meredekségű szakaszokból áll, amelyek a $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ helyeken felvett $\frac{\pi}{2}$ értékű, és a $2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ helyeken felvett $-\frac{\pi}{2}$ értékű pontokat kötik össze.

4. a) $5^x = e^{\ln 5^x} = e^{x\ln 5}$.

b) $\log_3 10 = \dfrac{\ln 10}{\ln 3}$.

c) $3^{\ln x} = (e^{\ln 3})^{\ln x} = e^{(\ln 3)(\ln x)}$.

d) $x^{\sqrt{x}} = e^{\ln(x^{\sqrt{x}})} = e^{\sqrt{x}\ln x}$.

5. a) $g(1) = 3$, és $g'(1) = 1/f'(g(1)) = 1/f'(3) = 1/5$.

b) Az x^5 és az x^3 függvény is szigorúan monoton növő, így $f(x)$ is az (vagyis $a < b$-re $2a^5 + a^3 + 1 < 2b^5 + b^3 + 1$), tehát f invertálható. A $2x^5 + x^3 + 1 = 4$ egyenlet megoldásaként megkapjuk $g(4)$ értékét. Az $x = 1$ nyilván megoldás, és f invertálhatósága miatt más nem is lehet, tehát $g(4) = 1$. Ebből $g'(4) = \dfrac{1}{f'(g(4))} = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{13}$.

6. a) $$\left(\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+x^4-2x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} =$$

$\frac{1+x^2}{|1-x^2|} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, ami $\frac{2}{1+x^2}$, ha $|x| < 1$, és $-\frac{2}{1+x^2}$, ha $|x| > 1$, végül $x = \pm 1$ esetén nincs értelmezve.

b) $(\ln \operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2}$.

c) $(\arcsin \sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x}} = \frac{\cos x}{|\cos x|}$, ami 1, ha $\cos x > 0$, és -1, ha $\cos x < 0$.

d) $(\cos \arcsin x)' = -\sin(\arcsin x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, vagy a 2.c) eredményét használva, $\sqrt{1-x^2}$ deriváltjaként is megkaphatjuk.

7. a) Az egyenlet mindkét oldalát deriválva x szerint: $y^2 + 2xyy' + 3y^3 + 9xy^2y' - 1 = 0$, amiből $y'(2xy + 9xy^2) = 1 - y^2 - 3y^3$, így $y' = \frac{1-y^2-3y^3}{2xy+9xy^2}$.

b) $-\frac{1}{x^2} - \frac{y'}{y^2} = 0$, és $x = 2$-nél $y = 2$, így $-\frac{1}{4} - \frac{y'(2)}{4} = 0$, tehát $y'(2) = -1$. Ha még egyszer deriváljuk az egyenletet, $\frac{2}{x^3} + \frac{2}{y^3}(y')^2 - \frac{1}{y^2}y'' = 0$. Ebbe behelyettesítve az $x = 2$, $y = 2$, $y' = -1$ értékeket azt kapjuk, hogy $\frac{2}{8} + \frac{2}{8} - \frac{1}{4}y''(2) = 0$, tehát $y''(2) = 2$. (Megjegyzés: Itt az y-t expliciten is ki tudjuk fejezni, és úgy deriválni.)

c) Az egyenlet deriválásából: $3y^2y' = 1 - y'$, így $y' = \frac{1}{3y^2+1}$. Ezt még egyszer deriválva: $y'' = -\frac{6yy'}{(3y^2+1)^2} = -\frac{6y}{(3y^2+1)^3}$.

8. a) $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{6t^2}{6t} = t$, így $t_0 = 3$-nál az érintő meredeksége 3, a görbe pontja pedig $(27, 54)$, tehát az érintő egyenlete $y - 54 = 3(x - 27)$, azaz $y = 3x - 27$.

b) $\frac{dx}{dt} = \frac{3}{\cos^2 t}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{5\sin t}{\cos^2 t}$, tehát $x'(t_0) = 6$, $y'(t_0) = 5\sqrt{2}$, így az érintő meredeksége $\frac{5\sqrt{2}}{6}$, a görbe pontja t_0-nál $(2, 5\sqrt{2}+2)$, és az érintő egyenlete $y - 5\sqrt{2} - 2 = \frac{5\sqrt{2}}{6}(x-2)$.

c) $\frac{dx}{dt} = 4 + 2t$, $\frac{dy}{dt} = 4t$, a meredekség $\frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, a görbe pontja $(5, 2)$, és az érintő egyenlete $y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$.