

- Egy egységélű kocka alaplappja $ABCD$ fedőlapja pedig $A_1B_1C_1D_1$, ahol az egyes csúcsok az alap azonos betűvel jelzett csúcsa fölött vannak. Számítsuk ki a következő kifejezéseket (ahol az eredmény vektor, azt a kocka valamely két csúcsát összekötő vektorként adjuk meg).
 - $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC_1}$
 - $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{BD_1} + \overrightarrow{C_1B}$
 - $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB_1}$
 - $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{AB}|$
 - $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{D_1A}$
- Igaz-e, hogy ha $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$, és $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{a} = \mathbf{b}$?
- Egyszerűsítsük a következő szorzatokat:
 - $(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{a} - \mathbf{b})$
 - $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b})$
 - $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c})$ vegyesszorzat
- Ha $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ egységvektorok, és $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$, akkor mennyi $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$?
- Bizonyítsuk be, hogy $((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\mathbf{a}$ párhuzamos $\mathbf{b}$ -vel vagy $\mathbf{a}$ merőleges $\mathbf{b}$ -re. (Úgy tekintjük, hogy a $\mathbf{0}$ vektor mindennel párhuzamos és mindenre merőleges.)
- Legyen $\mathbf{u} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (0, 1, -1)$ és $\mathbf{w} = (1, 0, 0)$.
 - Számítsuk ki a következő kifejezéseket:

$\mathbf{uv}$	$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$	$\mathbf{uvw}$	$(\mathbf{uv})\mathbf{w}$	$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$
---------------	--------------------------------	----------------	---------------------------	--
 - Keressünk $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ -hez olyan vektort, amely mindkettőre merőleges.
- Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$ vektor vetületét a $\mathbf{b} = (0, 1, -1)$ vektorra! Állítsuk elő az $\mathbf{a}$ vektort egy $\mathbf{b}$ vektorra merőleges és egy $\mathbf{b}$ vektorral párhuzamos vektor összegeként!
- Mekkora a $(2, -1)$ és $(-1, 3)$ vektorok szöge?
 - Milyen t értékre lesz az $(1, t, 1)$ és $(t, -1, 1)$ vektorok szöge 60° ?
 - Tegyük fel, hogy $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, és $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - 2\mathbf{b}|$. Mekkora az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szöge?
- Mekkora az $(1, 0, -1)$, $(2, 2, 3)$, $(0, 1, 0)$ és $(1, 2, 1)$ csúcsok által meghatározott tetraéder térfogata?
- Lineárisan összefüggők-e, illetve a t milyen értékére lineárisan összefüggők az alábbi vektorrendszerek?
 - $\{(1, 1, 0), (2, 2, 0), (0, 1, 2)\}$
 - $\{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$
 - $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$
 - $\{(2, t, 1), (4, 3t, 2)\}$
 - $\{(1, 2, t), (0, t, -1), (1, 0, 3)\}$
- Írjuk föl, az $(1, 2, 3)$ vektort a 10.c) feladat vektorainak lineáris kombinációjaként, ha lehetséges!
- Legyenek $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ lineárisan függetlenek. Lineárisan függetlenek-e az $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ és $\mathbf{c} + \mathbf{a}$ vektorok?

Megoldások

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AB_1}$
 - $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{BD_1} + \overrightarrow{C_1B} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD_1}) + (\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{C_1B}) = \overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{D_1C_1} = \overrightarrow{AC_1}$
 - $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB_1} = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = 1$
 - $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD_1}$ merőleges az $\overrightarrow{AB}$ vektorra, így összegük hossza a Pithagorasz-tétel szerint $\sqrt{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD_1}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2} = \sqrt{(1 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 90^\circ)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$
 - Az ACD_1 háromszög minden oldala $\sqrt{2}$ hosszú, tehát a háromszög szabályos, és így $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{AD_1}$ szöge 60° , az $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{D_1A}$ szöge pedig 120° . Tehát $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{D_1A} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 120^\circ = -1$.
- Nem igaz. Legyen például $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ két azonos hosszúságú, de nem párhuzamos vektor, és $\mathbf{c}$ merőleges az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ síkjára. Ekkor $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$, de $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$.
- $(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 - \mathbf{ab} + \mathbf{ba} - \mathbf{b}^2 = \mathbf{a}^2 - \mathbf{ab} + \mathbf{ab} - \mathbf{b}^2 = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2$.
 - $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{a} - \mathbf{b} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} - \mathbf{a} \times \mathbf{b} - \mathbf{a} \times \mathbf{b} - \mathbf{0} = -2\mathbf{a} \times \mathbf{b}$
 - $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{aab} + \mathbf{aac} + \mathbf{bab} + \mathbf{bac} = 0 + 0 + 0 + \mathbf{bac} = \mathbf{bac}$, mert egy síkban levő vektorok vegyesszorzata 0.
- $0 = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)^2 = \mathbf{e}_1^2 + \mathbf{e}_2^2 + \mathbf{e}_3^2 + 2(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) = 3 + 2(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)$, így $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = -\frac{3}{2}$. Vagy geometriailag: a három vektor egy egység oldalú szabályos háromszöget alkot, amelynek az oldalai egy adott körüljárás szerint vannak irányítva, tehát bármely két egymást követő vektor szöge 120° , skalárszorzata pedig $-\frac{1}{2}$, így a keresett kifejezés $-\frac{3}{2}$.
- Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ párhuzamosak, akkor már az első vektoriális szorzat $\mathbf{0}$, ha merőlegesek (és egyik sem $\mathbf{0}$), akkor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ síkjának normálvektora, és $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}$ ebben a síkban $\mathbf{a}$ -ra merőleges vektor, tehát $\mathbf{b}$ -vel párhuzamos, és így $((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.
Fordítva, tegyük fel, hogy teljesül az egyenlőség, és feltehetjük, hogy $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem $\mathbf{0}$. Ha $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{a}$ párhuzamos $\mathbf{b}$ -vel. Ha ez nem $\mathbf{0}$, de $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}$ igen, akkor $\mathbf{a}$ párhuzamos a $\mathbf{b}$ -re merőleges nem nulla $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektorral, tehát $\mathbf{a}$ merőleges $\mathbf{b}$ -re. Végül ha ez a szorzat sem $\mathbf{0}$, akkor $\mathbf{b}$ párhuzamos az $\mathbf{a}$ -ra merőleges nem nulla $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}$ vektorral, így $\mathbf{b}$ merőleges $\mathbf{a}$ -ra.
- $\mathbf{uv} = (1, 2, 1)(0, 1, -1) = 0 + 2 - 1 = 1$,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-3) - \mathbf{j}(-1) + \mathbf{k} \cdot 1 = (-3, 1, 1),$$

$$\mathbf{uvw} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v})\mathbf{w} = (-3, 1, 1)(1, 0, 0) = -3 + 0 + 0 = -3,$$

$$(\mathbf{uv})\mathbf{w} = 1 \cdot \mathbf{w} = (1, 0, 0), \text{ és}$$

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (-3, 1, 1) \times (1, 0, 0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \cdot 0 - \mathbf{j}(-1) + \mathbf{k}(-1) = (0, 1, -1).$$
 - $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (-3, 1, 1)$ ilyen, továbbá ennek bármely skalárszorosa is.
- A vetület $\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{b}|^2} \mathbf{b} = \frac{1}{2}(0, 1, -1) = (0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, és $\mathbf{a} - \mathbf{a}' = (1, 1, 0) - (0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
a kiegészítő vektor: $(1, 1, 0) = (0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) + (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

8. a) A két vektor szögének koszinusza $\frac{(2, -1)(-1, 3)}{|(2, -1)| \cdot |(-1, 3)|} = \frac{-5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, így a vektorok szöge 120° .
- b) Ha φ a két vektor szöge, akkor $\cos \varphi = (1, t, 1)(t, -1, 1)/(|(1, t, 1)| \cdot |(t, -1, 1)|) = 1/(t^2 + 2)$. Akkor lesz $\varphi = 60^\circ$, ha $1/(t^2 + 2) = 1/2$, azaz $t = 0$.
- c) A feltételből következik, hogy $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = (\mathbf{a} - 2\mathbf{b})^2$, azaz $\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + 2\mathbf{a}\mathbf{b} = \mathbf{a}^2 + 4\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{a}\mathbf{b}$. Ebből $6\mathbf{a}\mathbf{b} = 3\mathbf{b}^2$, és a két vektor szögének koszinusza $\mathbf{a}\mathbf{b}/(|\mathbf{a}||\mathbf{b}|) = \mathbf{a}\mathbf{b}/|\mathbf{b}|^2 = \frac{1}{2}$. Tehát a két vektor szöge 60° .
9. Az $(1, 0, -1)$ csúcsból kiinduló élvektorok $(1, 2, 4)$, $(-1, 1, 1)$ és $(0, 2, 2)$, az ezek által meghatározott paralelepipedon előjeles térfogata $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 2 \cdot (-2) + 4 \cdot (-2) = -4$, a tetraéder térfogata pedig a paralelepipedon térfogatának hatodrésze: $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
10. a) Összefüggők, mert a második vektor kétszerese az elsőnek (vagy: $2 \cdot \mathbf{v}_1 - 1 \cdot \mathbf{v}_2 + 0 \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ nem triviális lineáris kombináció, ami a $\mathbf{0}$ vektort adja).
- b) Összefüggők, mert a harmadik vektor az első kettőnek az összege.
- c) Függetlenek: ha $x(1, 0, 0) + y(1, 1, 0) + z(1, 1, 1) = (0, 0, 0)$, akkor $(x + y + z, y + z, z) = (0, 0, 0)$, és így $z = 0$, $y = 0$ és $x = 0$. (Vagy: $\mathbb{R}^3$ három nem egy síkban fekvő vektora mindig független.)
- d) Két vektor csak akkor lehet összefüggő, ha valamelyik a másiknak skalárszorosa, s mivel egyik vektor sem $\mathbf{0}$, ez a skalár nem 0, és így bármelyik vektor a másik skalárszorosa. Legyen $(4, 3t, 2) = \lambda(2, t, 1)$. Az első komponens miatt $\lambda = 2$, és így $3t = 2t$, azaz $t = 0$. Ebben az esetben pedig valóban összefüggők: $(4, 0, 2) = 2(2, 0, 1)$.
- e) $\mathbb{R}^3$ -ben három vektor pontosan akkor lineárisan összefüggő, ha egy síkban vannak, azaz a vegyes szorzatuk 0. Ennek a három vektornak a vegyes szorzata $-t^2 + 3t - 2$, és ez $t = 1$ és $t = 2$ esetén 0.
11. $(1, 2, 3) = x(1, 0, 0) + y(1, 1, 0) + z(1, 1, 1) = (x + y + z, y + z, z)$, ebből $z = 3$, $y = 2 - z = -1$, és $x = 1 - y - z = -1$, azaz $(1, 2, 3) = -(1, 0, 0) - (1, 1, 0) + 3(1, 1, 1)$.
12. Tegyük fel, hogy valamely x, y, z skalárookra $x(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + y(\mathbf{b} + \mathbf{c}) + z(\mathbf{c} + \mathbf{a}) = \mathbf{0}$. Az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok szerint rendezve az egyenletet azt kapjuk, hogy $(x + z)\mathbf{a} + (x + y)\mathbf{b} + (y + z)\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok függetlenségéből következik, hogy $x + z = x + y = y + z = 0$, és könnyen látható, hogy ennek csak $x = y = z = 0$ a megoldása, így $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ és $\mathbf{c} + \mathbf{a}$ is lineárisan függetlenek.