Algebrai görbék és felületek

Példák

Nagy Gábor Péter

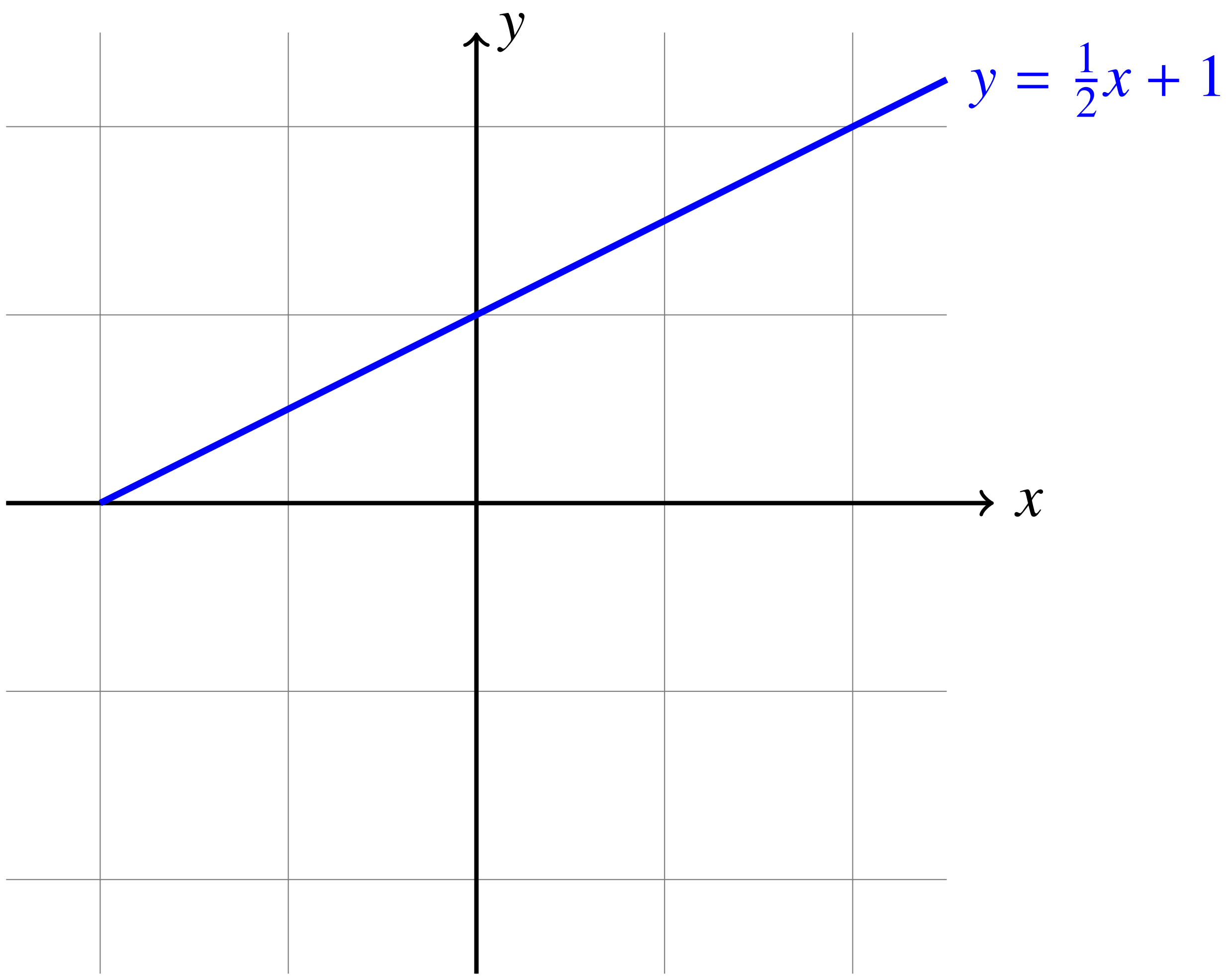
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Matematika Intézet, Algebra Tanszék

2018/2019-es tanév I. féléve

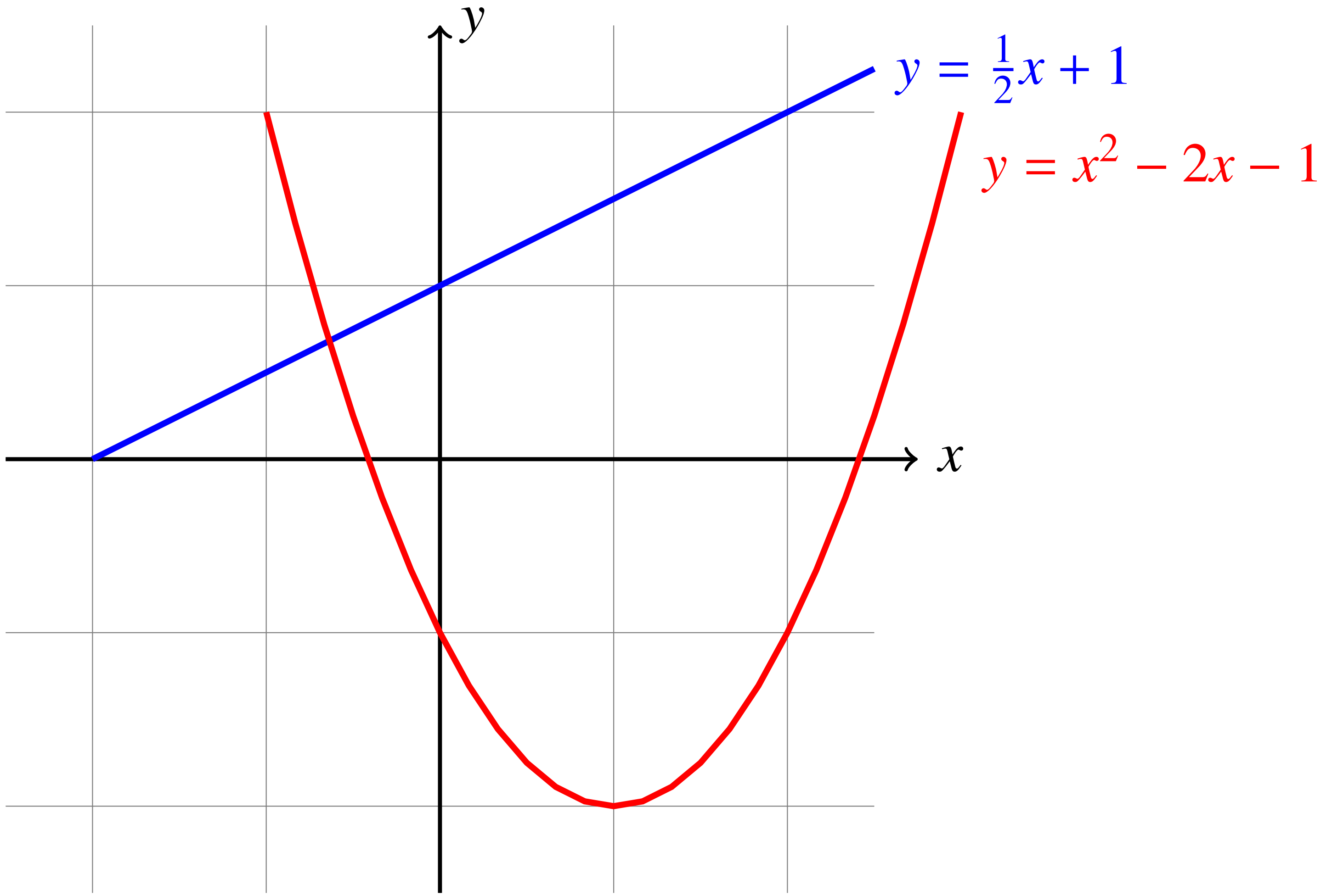
Tagolás

1. Példák algebrai síkgörbékre
   - Polinomok grafikonjai
   - Kúpszeletek
   - Harmadrendű görbék
   - Magasabb fokú görbék
2. Algebrai felületek
3. Térgörbék

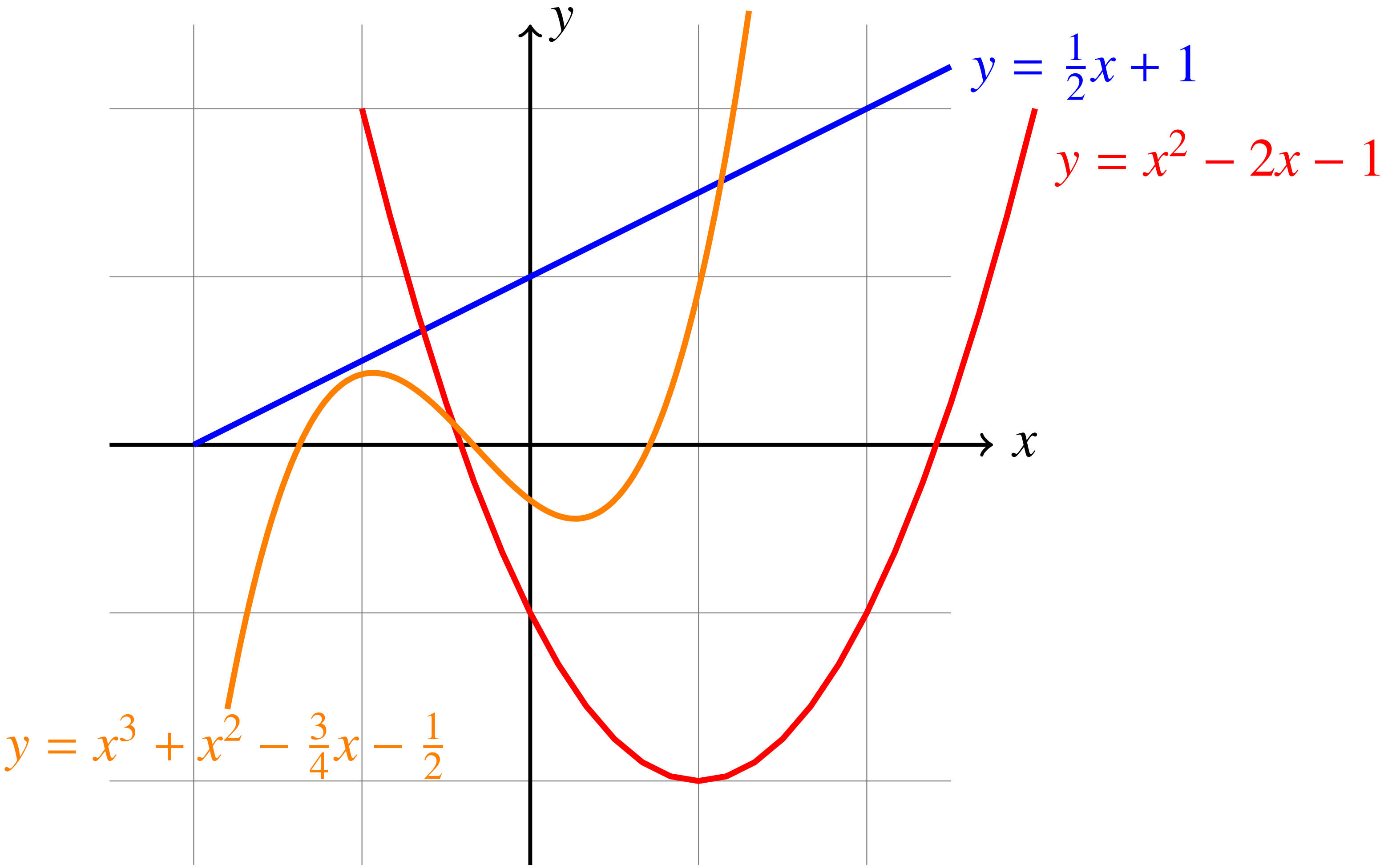
Első-, másod-, harmad- és negyedfokú függvények



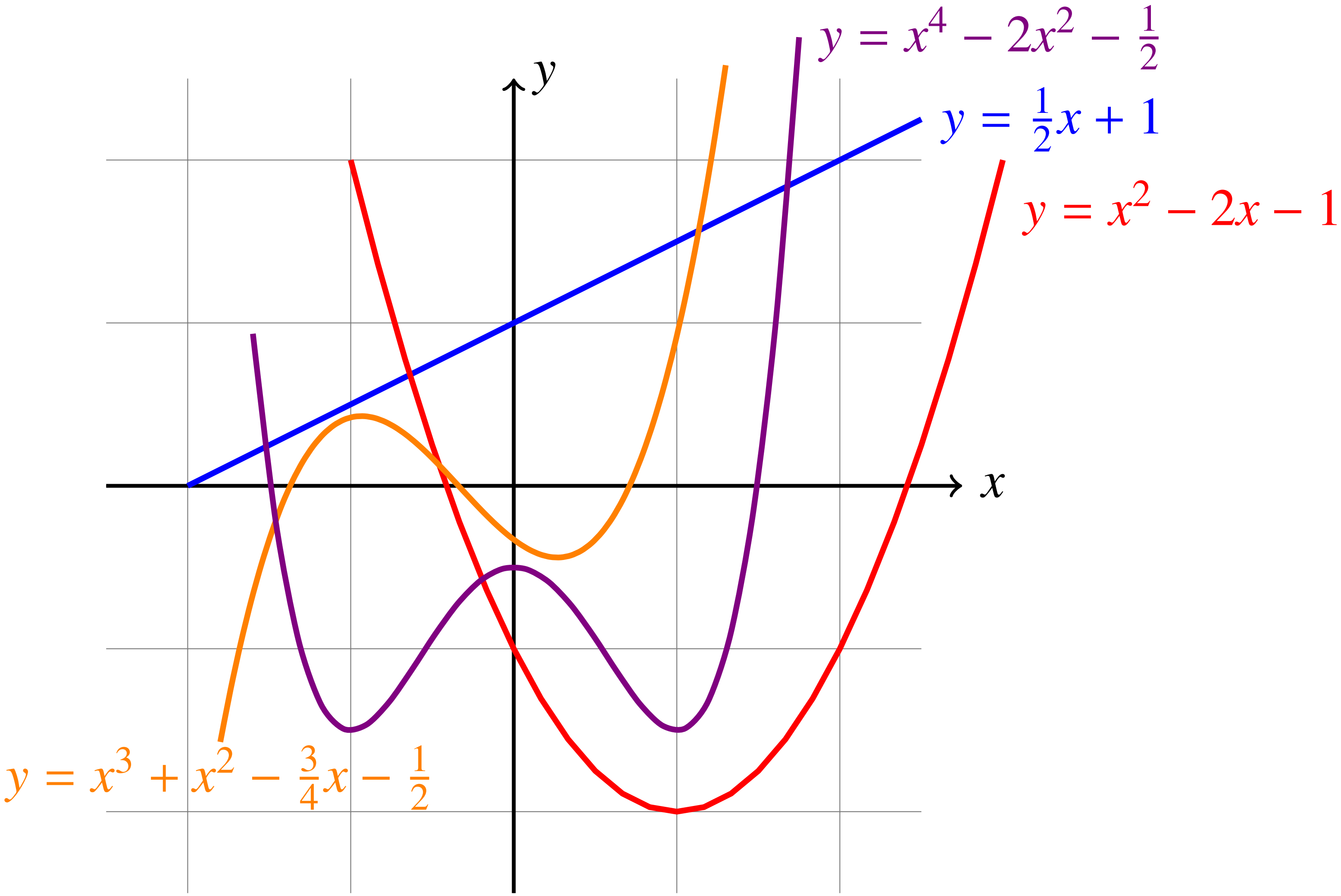
Első-, másod-, harmad- és negyedfokú függvények



Első-, másod-, harmad- és negyedfokú függvények



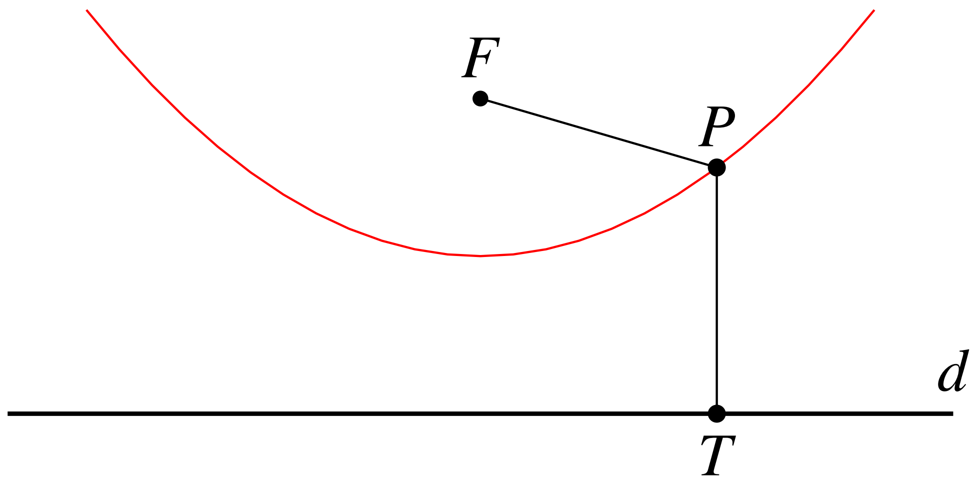
Első-, másod-, harmad- és negyedfokú függvények



A parabola

Definíció

Adott a d egyenes (vezéregyenes, direktrix) és az F pont (gyújtópont, fókusz). Azon pontok mértani helyét, melyek távolsága d-től és F-től egyenlő, parabolának nevezzük.

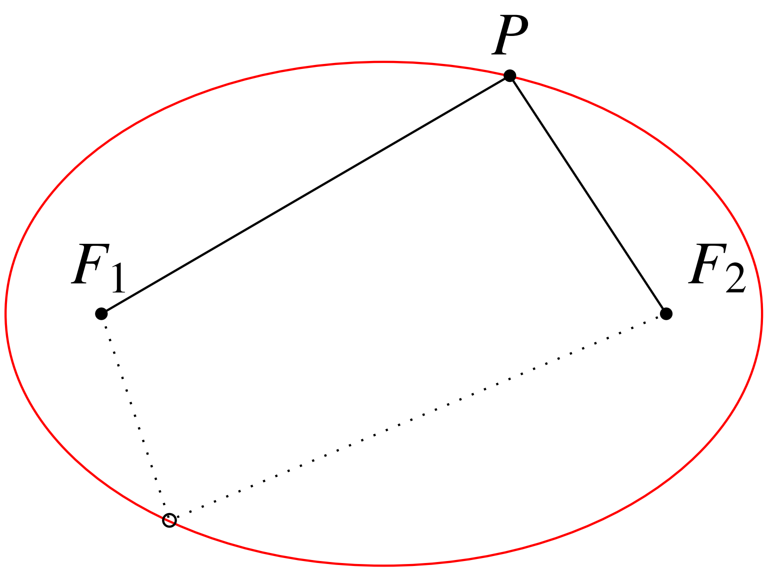


$$|FP| = |PT|$$

Az ellipszis

Definíció

Adottak az F_1, F_2 pontok (gyújtópontok, fókuszok) és az $r > |F_1F_2|$ távolság. Azon pontok mértani helyét, melyek F_1, F_2-től távolságainak **összege** r, ellipszisnek nevezzük.

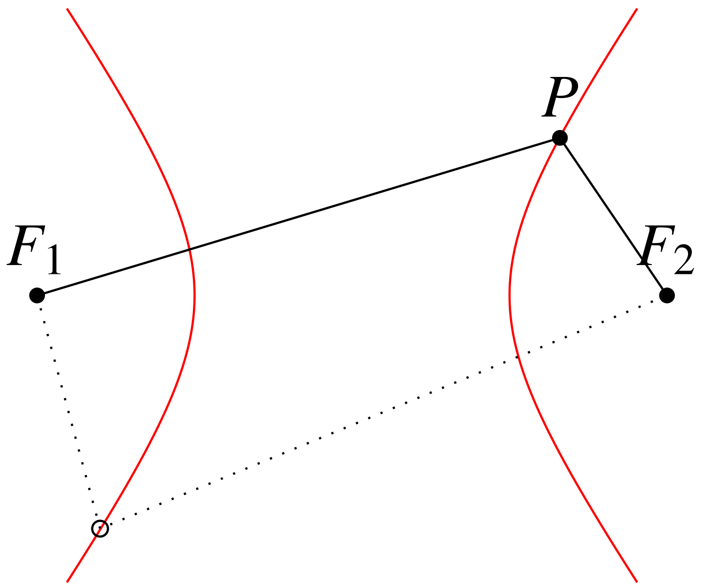


$$|F_1P| + |PF_2| = r$$

A hiperbola

Definíció

Adottak az F_1, F_2 pontok (gyújtópontok, fókuszok) és az $r < |F_1F_2|$ távolság. Azon pontok mértani helyét, melyek F_1, F_2-től távolságainak **különbsége** r, hiperbolának nevezzük.



$$|F_1P| - |PF_2| = \pm r$$

Kúpszeletek kanonikus egyenlete

Definíció

A parabolákat, ellipsziseket és hiperbolákat összefoglaló néven kúpszeleteknek nevezzük.

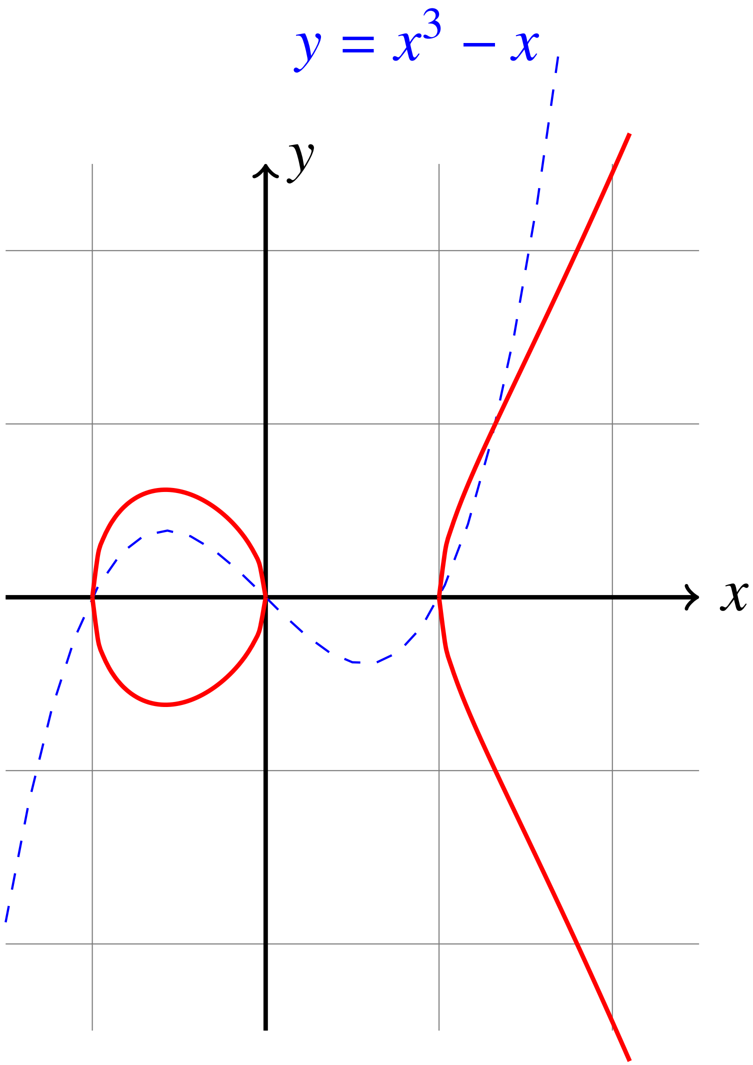
Tétel

A Descartes-féle derékszögű koordinátarendszer **megfelelő megválasztásával** a kúpszeletek egyenlete az alábbi kanonikus alakra hozható:

- Parabola: $X^2 = 2pY$.
- Ellipszis: $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$.
- Hiperbola: $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$.

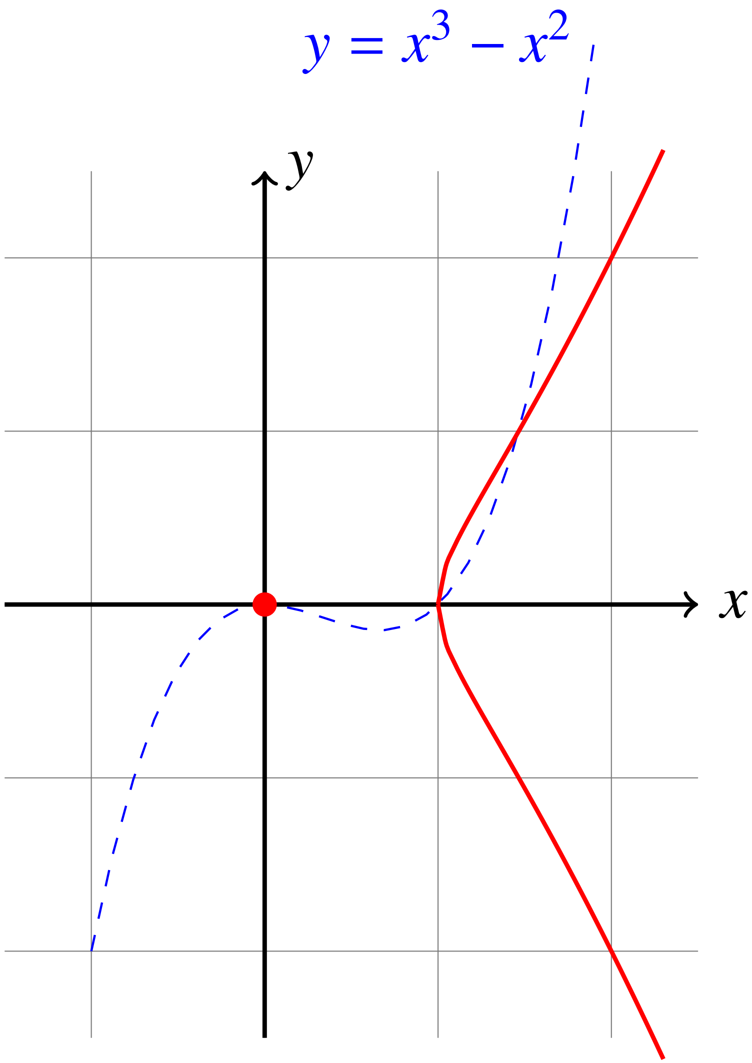
Az a, b, p valós számoknak geometriai jelentés tulajdonítható.

Szinguláris pont nélkül: $Y^2 = X^3 - X$



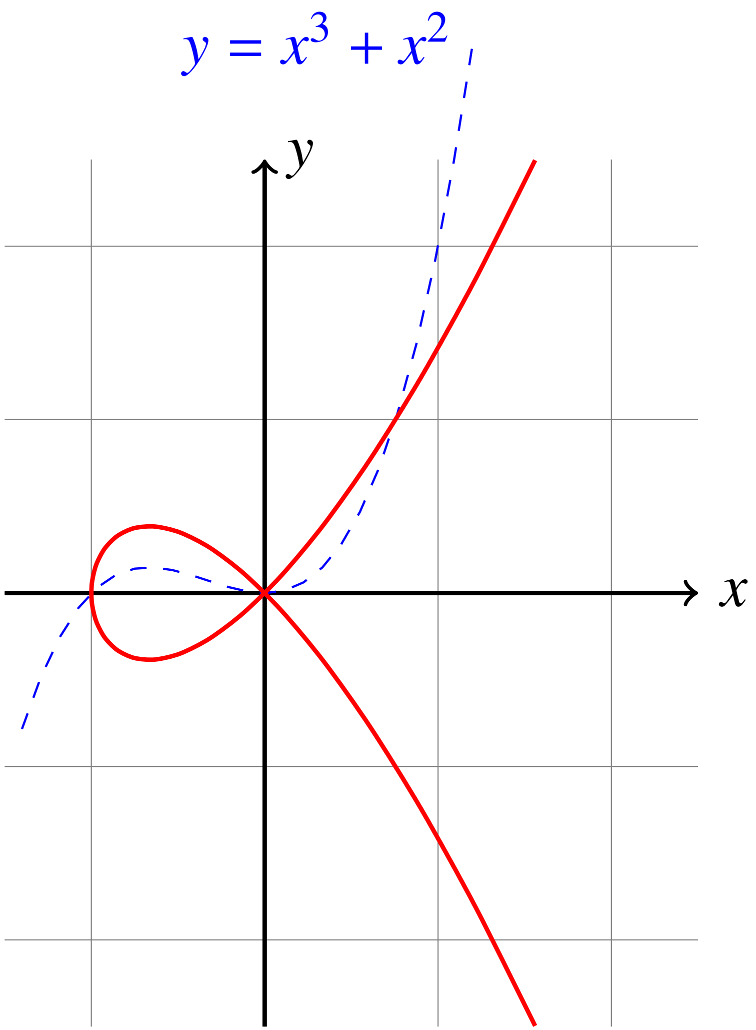
- Ennél a görbénél az $f(x) = \pm\sqrt{x^3 - x}$ „függvény” grafikonját kell vizsgálnunk.
- Ezért az ábrán feltüntettük az $y = x^3 - x$ grafikont is.
- Világos, hogy f értelmezés tartománya $[-1, 0] \cup [1, \infty)$.
- Érdekes módon a görbe a $(-1, 0)$, $(0, 0)$ és $(1, 0)$ pontokban „kisimul”, azaz tudunk hozzá érintőt húzni.

Izolált ponttal: $Y^2 = X^3 - X^2$



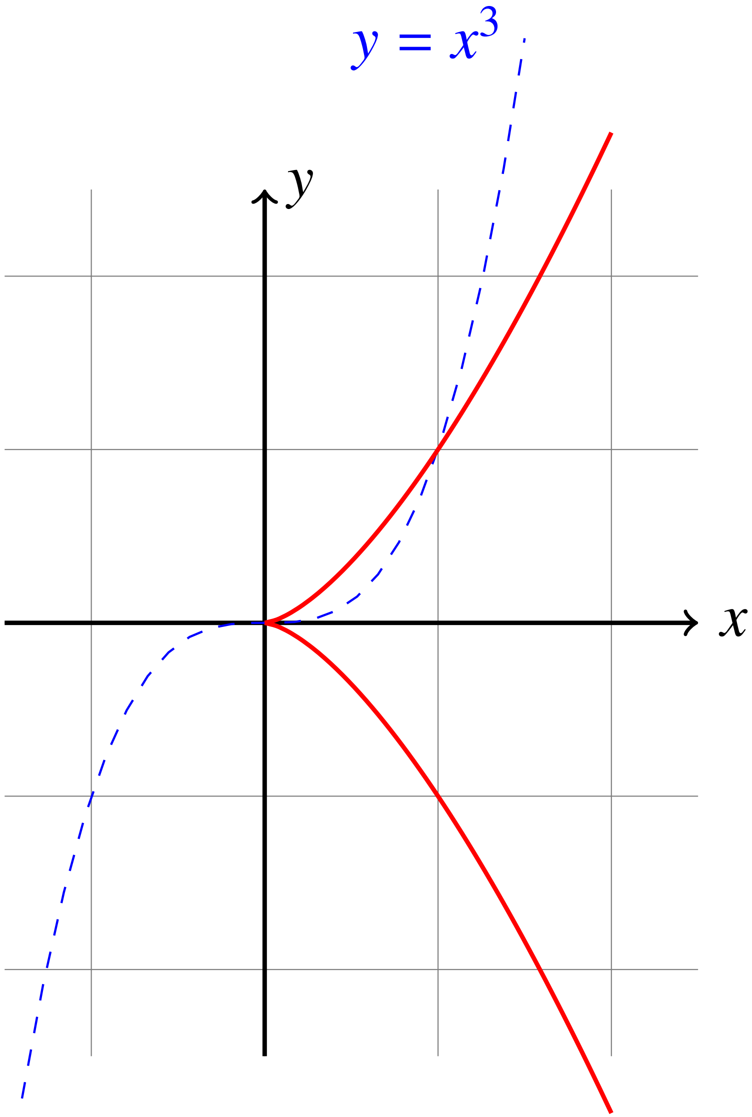
- Az előzőhöz hasonlóan, az $y = x^3 - x^2$ segédgrafikon felhasználásával tudjuk megadni a görbénk alakját.
- Érdekesség, hogy a görbe két összefüggőségi komponensből áll, melyek közül az egyik egyetlen pont.
- Az ilyen pontokat a görbe izolált pontjainak nevezzük.
- Izolált pontba természetesen nem tudunk érintőt húzni.

Közönséges szingularitással: $Y^2 = X^3 + X^2$



- A görbét a szokásos módon, az $y = x^3 + x^2$ grafikon felhasználásával rajzoljuk meg.
- Azt látjuk, hogy a görbe az origóban átmetszi magát.
- Az origótól különböző pontokban a görbe sima.
- Az origóban a görbe két „sima ága” metszi egymást.
- Itt többféle értelemben beszélhetünk érintő egyenesről, ehhez azonban előbb az érintő fogalmát kell majd tisztáznunk.

Csúcsszerű (cuspidális) szingularitással: $Y^2 = X^3$



- Ezen görbe 90°-os elforgatottjával már találkozhattunk, ez az $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ függvény grafikonja.
- Az origótól különböző pontokban a görbe sima.
- Az origóban a két „ágnak” közös érintője van.

Görbék paraméterezése

A görbék ábrázolását nagyban megkönnyíti, ha fel tudjuk őket fogni, mint a számegyenes folytonos képe.

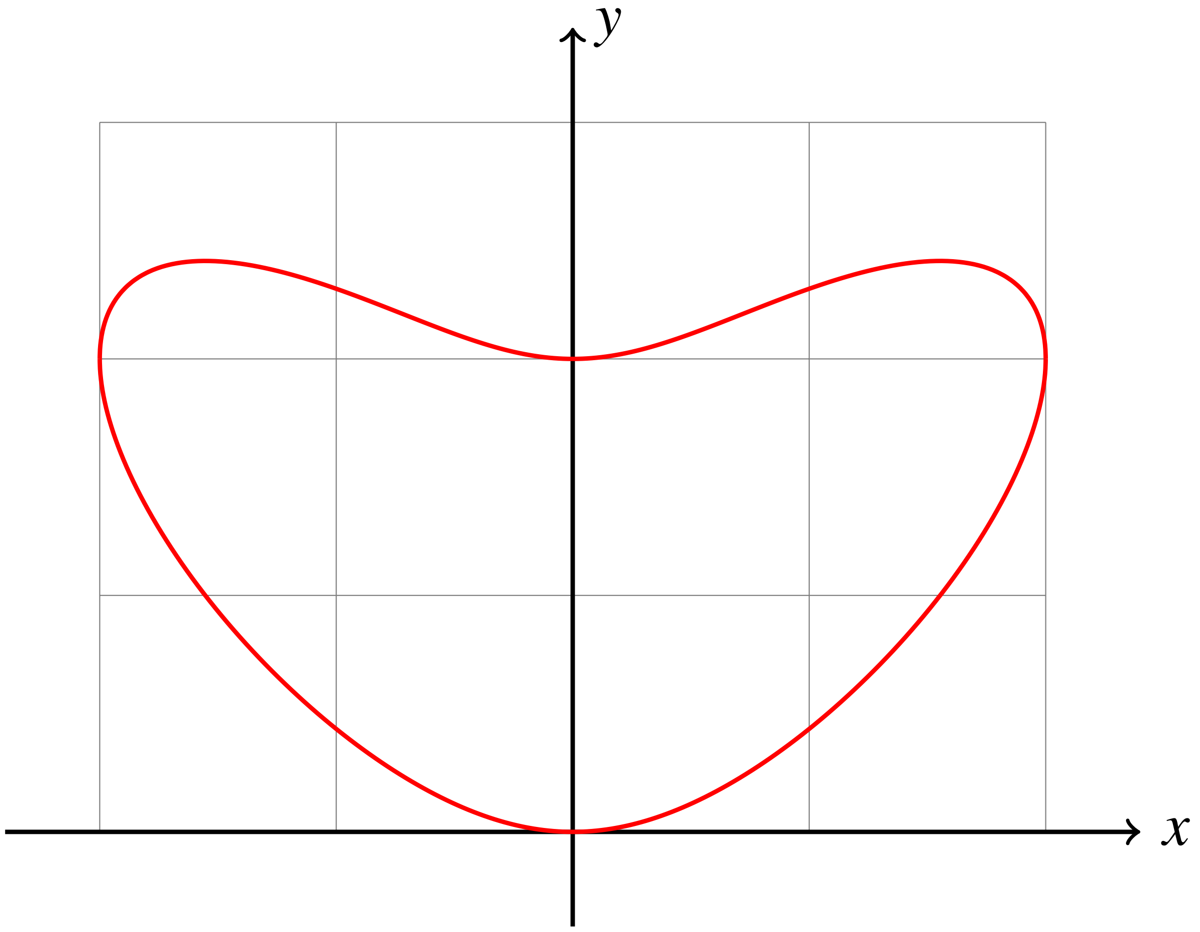
Definíció

Azt mondjuk, hogy az $u(t), v(t)$ függvények paraméterezik az $f(X, Y) = 0$ görbét, ha a görbe minden $P(x, y)$ pontjához létezik $t \in \mathbb{R}$, melyre $x = u(t), y = v(t)$.

- VIGYÁZAT! Egy görbének végtelen sok paraméterezése is lehet!
- $u(t), v(t)$ értelmezési tartománya $\mathbb{R}$ egy részhalmaza.
- Időnként a „görbe minden P" pontjához feltételt a „görbe kellően sok P pontjához" feltétellel helyettesítjük.
- Minden egyenes paraméterezhező lineáris függvényekkel: $x = u_1 t + u_2$, $y = v_1 t + v_2$.
- Az $f(x)$ függvény grafikonjának a paraméterezése $x = t, y = f(t)$.

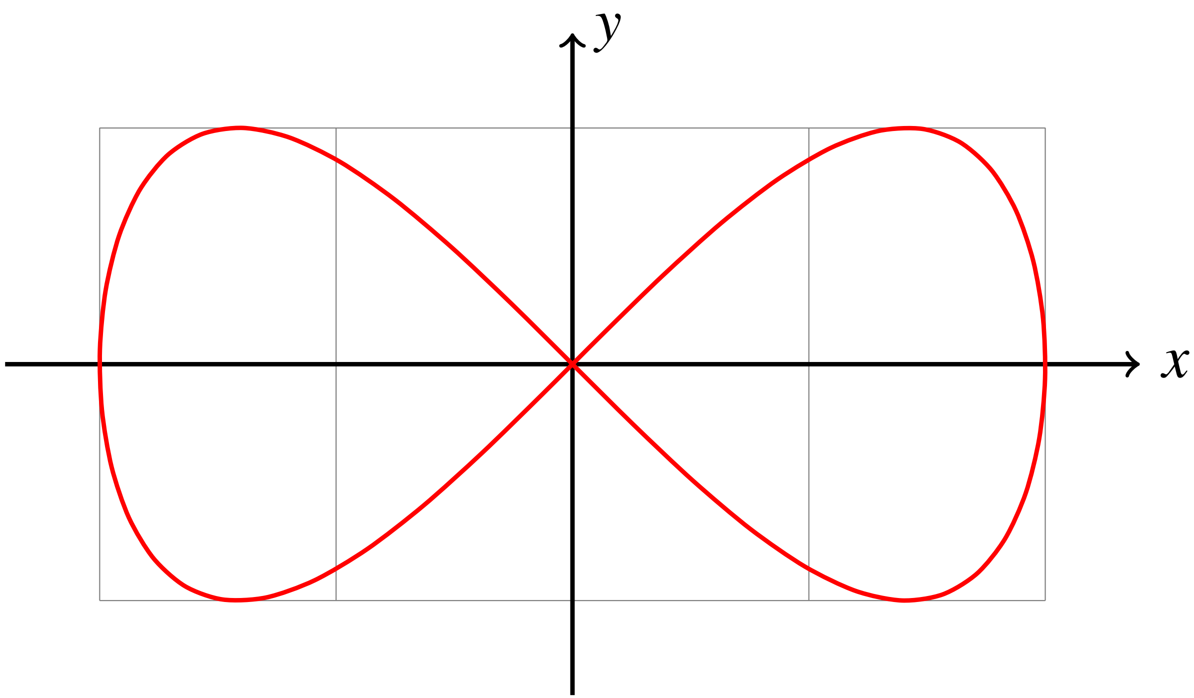
A bumeráng-görbe $Y(X^2 + Y^2) - X^4 - Y^4 = 0$

- Paraméterezés: $x = \dfrac{t(1+t^2)}{1+t^4}, \qquad y = \dfrac{1+t^2}{1+t^4}.$



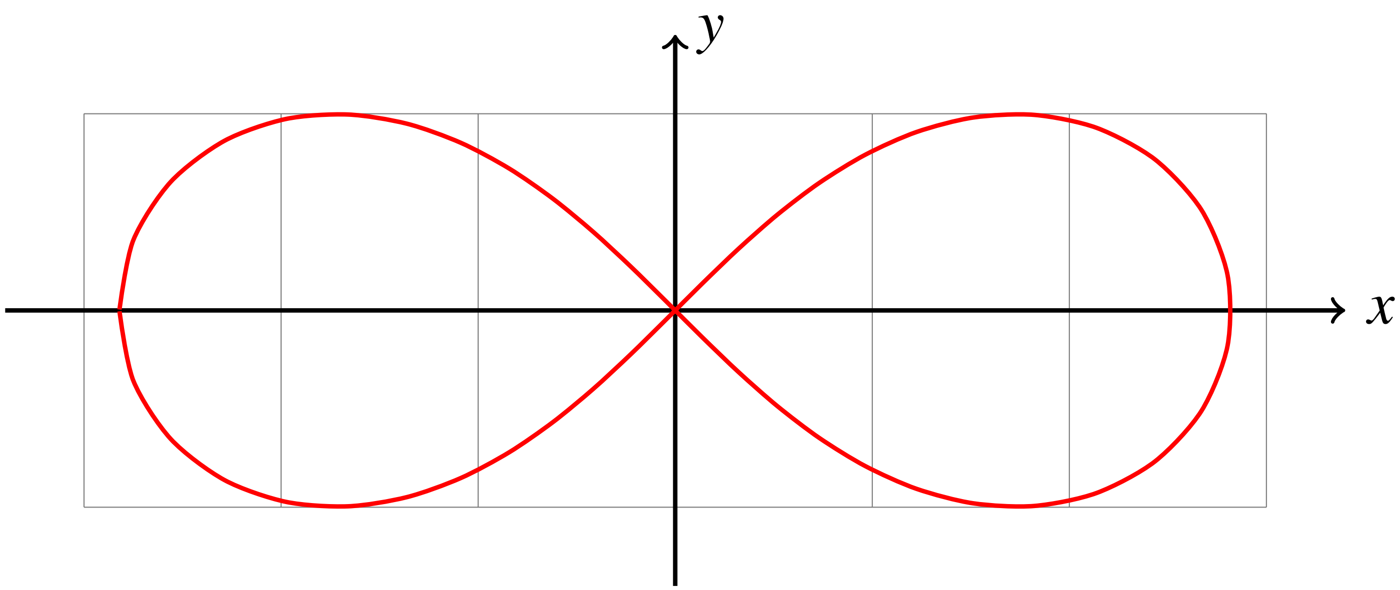
A nyolcas-görbe $Y^2 - X^2 + X^4 = 0$

- Paraméterezés: $x = \sin t, \qquad y = \cos t \sin t.$



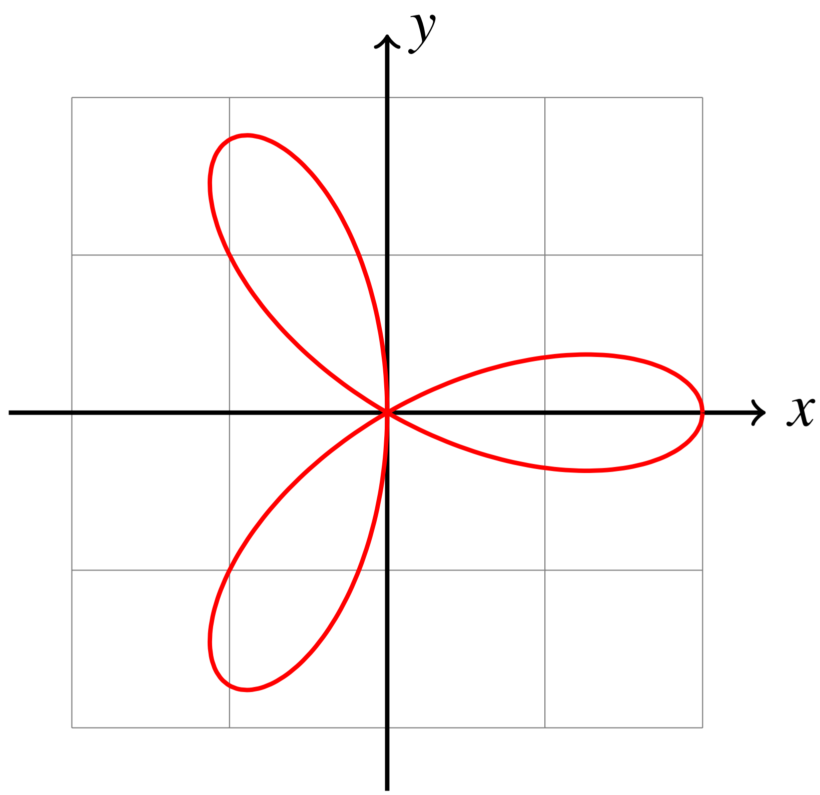
A Bernoulli-féle lemniszkáta $(X^2 + Y^2)^2 - 2(X^2 - Y^2) = 0$

- Paraméterezés: $x = \dfrac{\sqrt{2}\cos t}{\sin^2 t + 1}, \qquad y = \dfrac{\sqrt{2}\cos t \sin t}{\sin^2 t + 1}.$



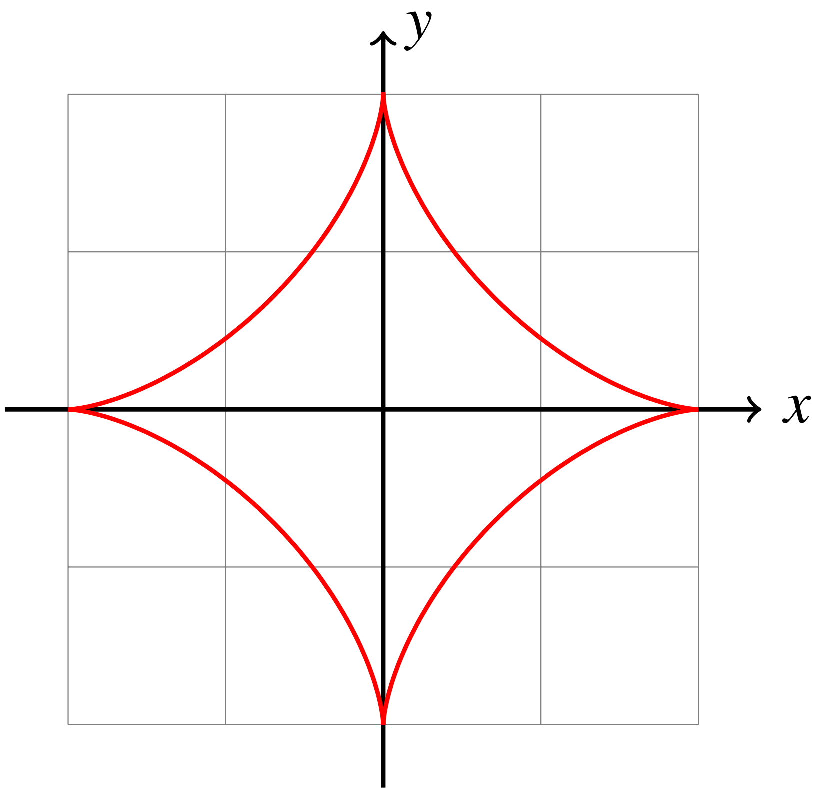
A háromlevelű lóhere görbe $(X^2+Y^2)^2 - X^3 + 3XY^2 = 0$

- Paraméterezés: $x = \cos(3t)\cos t, \qquad y = \cos(3t)\sin t.$



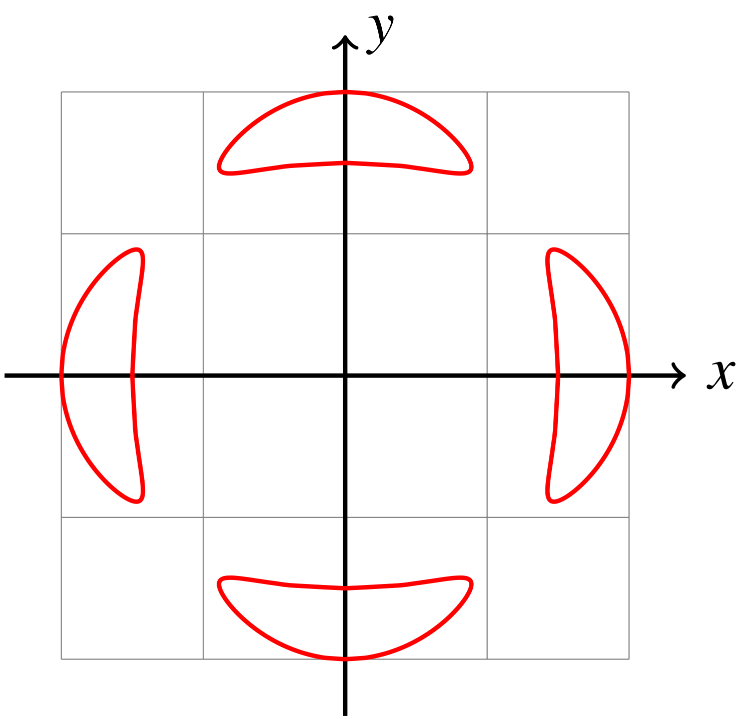
Az asztroid $(1 - X^2 - Y^2)^3 - 27X^2Y^2 = 0$

- Paraméterezés: $x = \sin^3 t, \qquad y = \cos^3 t.$



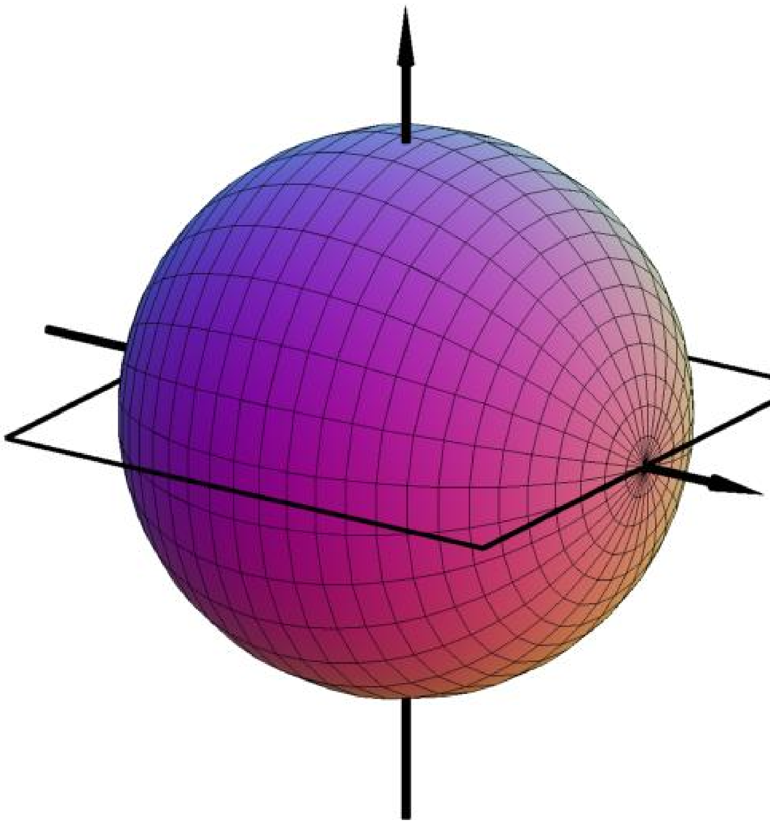
A Trott-féle görbe

- Egyenlete: $144(X^4 + Y^4) - 225(X^2 + Y^2) + 350X^2Y^2 + 81 = 0.$
- A paraméterezéshez keressük meg előbb a $144(X^2 + Y^2) - 225(X + Y) + 350XY + 81 = 0$ hiperbola egy paraméterezését.
- Számoljuk meg a kétszeresen érintő egyeneseket!



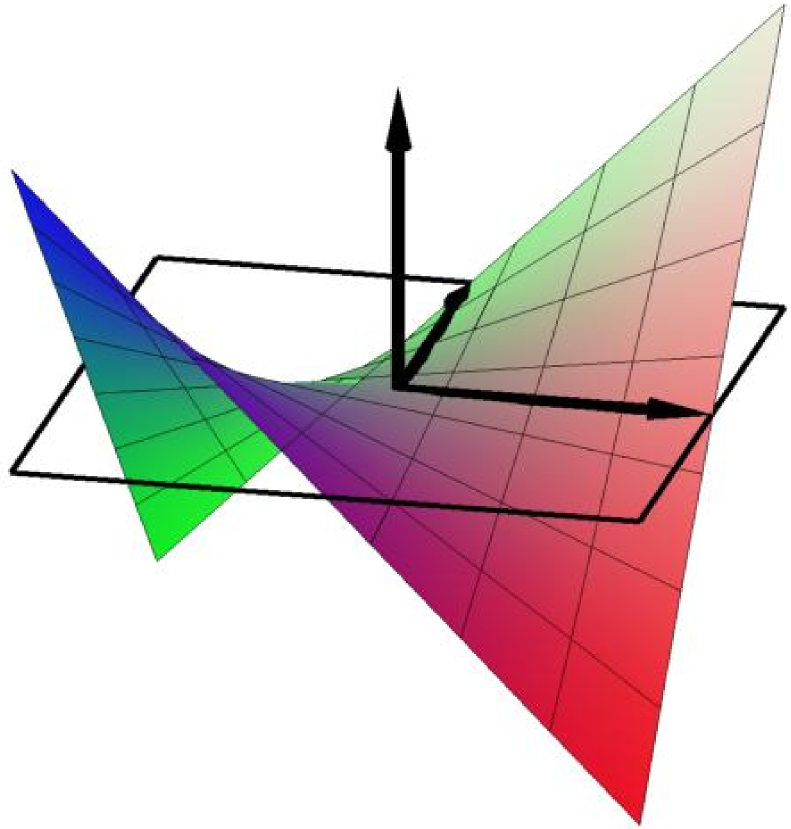
Gömbfelület $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$

- Az xy-síkban a félkört $(\cos u, \sin u, 0)$ paraméterezi, $u \in [0, \pi]$.
- Ennek x-tengely körüli körbeforgatása adja az $\mathbf{r}(u, v) = (\cos u, \sin u \cos v, \sin u \sin v)$ paraméterezést.



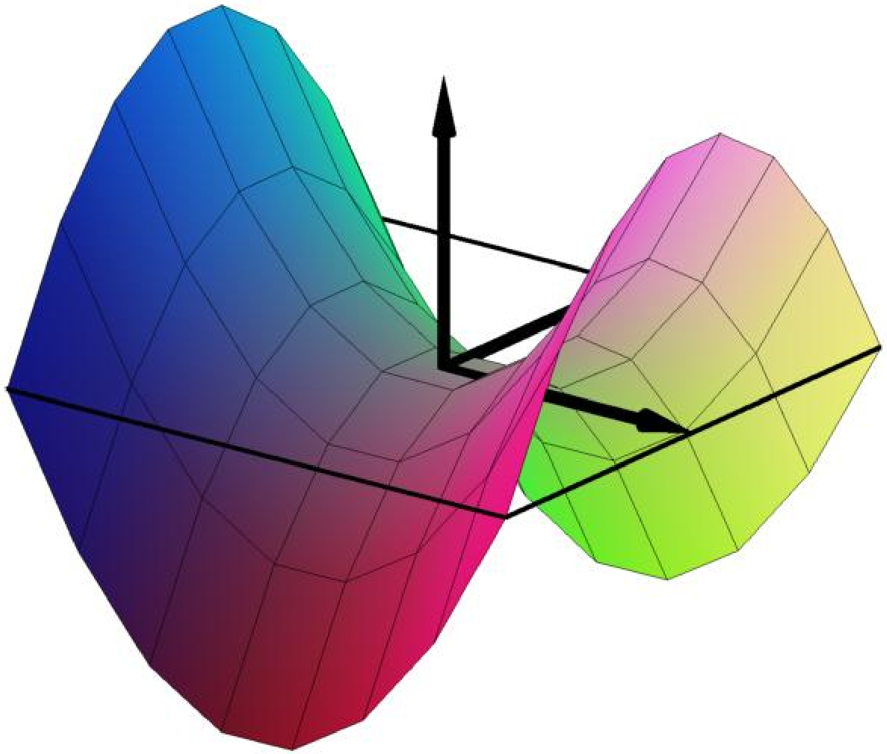
Nyeregfelület I

- Explicit alakja $Z = XY$.
- Tartalmaz egyeneseket!
- Pontosabban: Minden pontján át két egyenest (alkotót) tartalmaz. Ezek feszítik ki az adott pontbeli érintősíkot.
- Másodfokú felület, minden síkmetszete kúpszelet (esetleg elfajuló).
- Paraméterezése $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, uv)$.



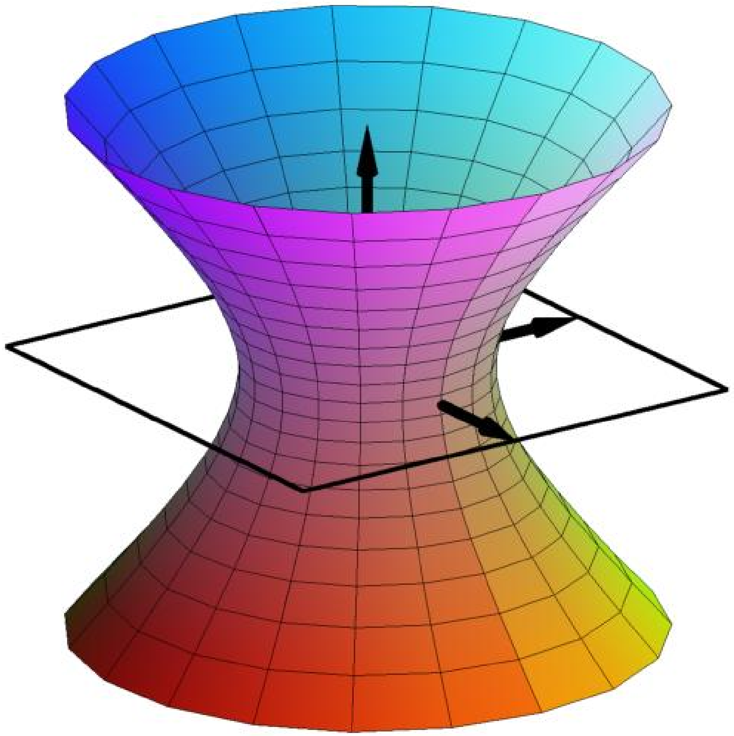
Nyeregfelület II

- Explicit alakja
  $Z = X^2 - Y^2$.
- Koordináta-transzformációval az előzőből megkapható:
  $x' = x + y, y' = x - y, z' = z$.
- Paraméterezése
  $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$.



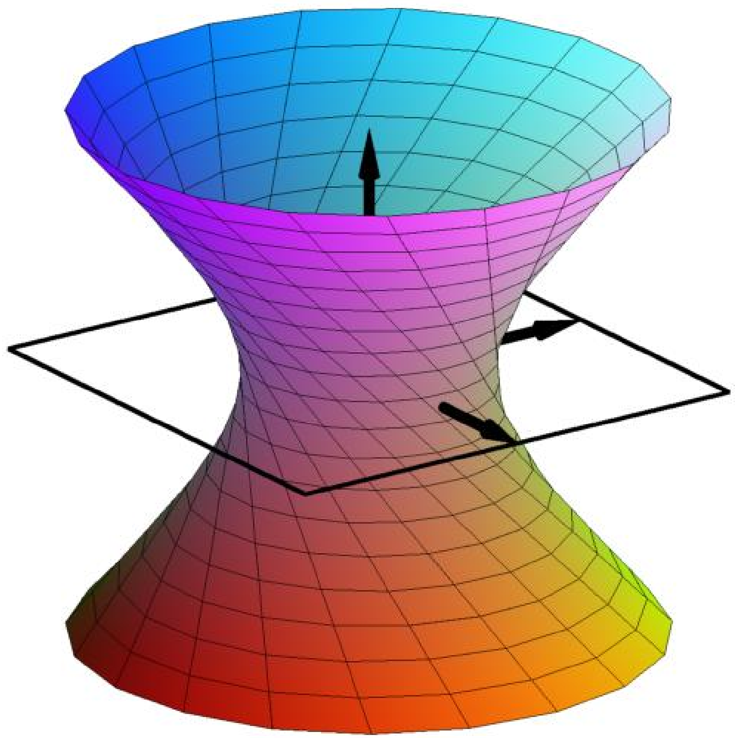
Egyköpenyű hiperboloid I

- Hiperbolát ($X^2 - Y^2 = 1$) forgatunk az őt nem metsző szimmetriatengelye körül.
- Implicit alakja: $X^2 + Y^2 - Z^2 = 1$.
- Paraméteres alakja: $(\cos u \cosh v, \sin u \cosh v, \sinh v)$.



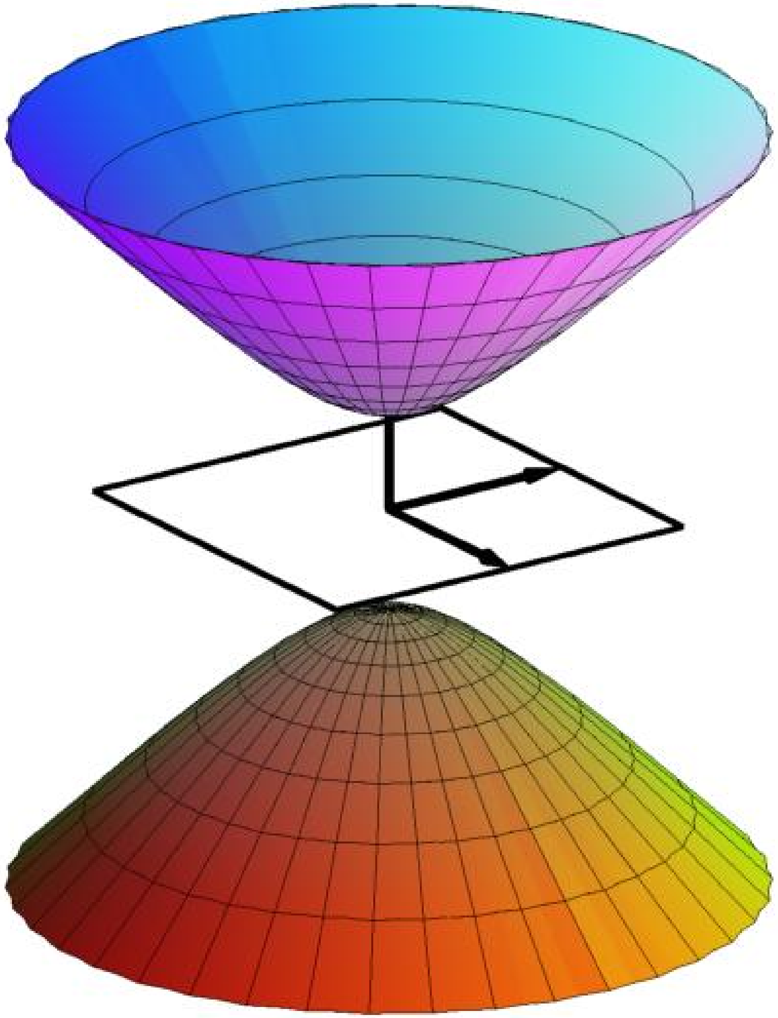
Egyköpenyű hiperboloid II

- A z-tengely körül forgatunk egy tőle kitérő egyenest.
- Szimmetria okokból két egyenessereg van a felületben, azaz minden ponton keresztül két alkotó megy.



Kétköpenyű hiperboloid

- Hiperbolát forgatjuk az őt metsző szimmetriatengelye körül.
- Implicit alakja: $X^2 - Y^2 - Z^2 = 1$.
- Paraméteres alakja: $(\cosh u, \sinh u \cos v, \sinh u \sin v)$.



Viviani-görbe

- Paraméteres alakja
  $\mathbf{r}(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2\sin(t/2))$.
- Az 0 középpontú 2 sugarú gömb és az 0-t tartalamzó 1 sugarú körhenger metszete.
- Feladat: Határozzuk meg a Viviani-görbe azon pontjait, ahol a görbület illetve a torzió 0.