Figyelem, minden feladat 1 pontot ér, bár a nehézség változó!

1. *(március* 1*-ig)* Határozzuk meg az ikozaéder G egybevágóságcsoportjának elemszámát!

2. *(március* 1*-ig)* Hány eleme van annak a csoportnak, amely az előjeles $2n$-el2mű halmazt permutálja? Azaz $\Omega = \{\pm x_1, \pm x_2, \ldots, \pm x_n\}$ és $G = \{\pi \in \mathrm{Sym}(\Omega) \mid x_i\pi = \varepsilon x_j \Leftrightarrow -x_i\pi = -\varepsilon x_j \forall i, j, \varepsilon\}$.

3. Írjuk le csoportelméletileg az ikozaéder egybevágóságcsoportjának struktúráját!

4. Határozzuk meg a 2. feladatbeli csoport struktúráját!

5. *(február* 22*-ig)* Legyen G véges csoport, $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Mutassuk meg, hogy a következő tulajdonságok ekvivalensek:

(i) $P \lhd G$;

(ii) P iaz egyetlen p-Sylow részcsoportja G-nek;

(iii) minden G-beli p-részcsoport része P-nek;

(iv) P karakterisztikus G-ben, azaz P invariáns G minden automorfizmusára.

6. *(február* 22*-ig)* Határozzuk meg az $S_3 - S_3$ ketős mellékosztályokat S_4-ben! Általánosítsuk és határozzuk meg az $S_{n-1} - S_{n-1}$ kettős mellékosztályokat S_n-ben!

7. *(március* 8*-ig)* Mutassuk meg, hogy ha a nemkommutatív egyszerű G csoport elemszáma legfeljebb 100, akkor $|G| = 60$. (Csak olyan tételt használjunk, amit bebizonyítottunk!)

8. *(március* 8*-ig)* Igazoljuk, hogy izomorfia erejéig A_5 az egyetlen 60-adrendű egyszerű csoport.

9. *(március* 8*-ig)* Igazoljuk, hogy minden tranzitív Abelcsoport reguláris.

10. Legyen $\varphi : \mathrm{GL}(2, F) \to \mathrm{Aut}(P^1(F))$ a következő leképezés a(z F test feletti) projektív egyenes automorfizmuscsoportjába: $\varphi(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$. Igazoljuk, hogy φ homomorfizmus. Határozzuk meg $\mathrm{Ker}(\varphi)$-t és bizonyítsuk be, hogy $\mathrm{Im}(\varphi)$ 3-tranzitív $P^1(F)$-en.

11. *(március* 15*-ig)* Van-e $\mathrm{SL}(2, 5)$-ben A_5-tel izomorf részcsoport?

12. *(március 15-ig)* Mutassuk meg, hogy $\mathrm{SL}(2,3)$ 2-Sylowja Q-val (kvaternió-csoporttal) izomorf normálosztó.

13. *(március 15-ig)* Legyen V egy $\mathbb{F}_q$-vektortér. Mutassuk meg, hogy létezik $M \leq \mathrm{GL}(V)$ ciklikus részcsoport, amely reguláris $V \setminus \{0\}$-n. (Ez és a konjugáltjai a Singer részcsoportok, a generátoraijk a Singer ciklusok.)

14. *(március 22-ig)* Legyen $G \leq S_n$ feloldható primitív permutációcsoport. Bizonyítsuk be, hogy $n = p^k$ prímhatvány és G izomorf $\mathrm{AGL}(k, \mathbb{F}_p)$ egy részcsoportjával.

15. *(március 26-ig)* Legyen G (véges) csoport. Igazoljuk a következő állításokat, ebben a sorrendben:

(i) Ha $a, b, c \in G$, akkor $[[a, b^{-1}], c]^b[[b, c^{-1}], a]^c[[c, a^{-1}], b]^a = 1$.

(ii) Ha $A, B, C \leq G$ és $[A, B] \leq C_G(C)$, $[A, C] \leq C_G(B)$ akkor $[B, C] \leq C_G(A)$.

(iii) Ha G^i jelöli az alsó centrális lánc i-dik tagját ($G^1 = G$, $G^i = [G^{i-1}, G]$), akkor $[G^i, G^j] \leq G^{i+j}$.

(iv) Ha G nilpotens, feloldhatósági hossza $d = \min\{n \mid G^{(n)} = 1\}$ és nilpotencia osztálya $c = \min\{n \mid G^n = 1\}$, akkor $c \geq 2^{d-1}$.

16. *(április 10-ig)* Legyen $G = A \rtimes P$ véges, P egy p-csoport, amely maximális G-ben. Bizbe, hogy A Abel q-csoport. (Itt $q = p$ is megengedett.)

17. *(április 10-ig)* Mutassuk meg, hogy ha $G = Z(G) \rtimes A$ véges p-csoport, akkor $|A| = 1$.

18. *(április 14-ig)* Határozzuk meg a $k \times k$-as 1-főátlójú (felső) háromszögmátrixok csoportjának nilpotencia osztályát és feloldhatósági hoszát. (Valamilyen test felett.)

19. *(április 14-ig)* Mutassuk meg, hogy minden feloldható csoportnak van legalább két nemkonjugált maximális részcsoportja, kivéve, ha a rendje 1 vagy prím.

20. Legyen F szabadcsoport X-en. Mutassuk meg, hogy F' azokból a szavakból áll, amelyekben minden generátor kitevőösszege 0 (más szóval, minden generátor pontosan annyiszor szerepeljen a szóban, mint az inverze).

21. Legyen F szabad csoport. Lássuk be, hogy két $a, b \in F$ elemére pontosan akkor teljesül $ab = ba$, ha $\exists u \in F$, $h, k \in \mathbb{Z}$, amelyekre $a = u^h$, $b = u^k$. (Azaz a, b pontosan akkor felcserélhető, ha egy azonos szó hatványai.)

22. Legyen F szabad az $X = \{x, y\}$ generátorokkal és $G = \langle g \rangle$ végtelen ciklikus. Definiáljuk a $\vartheta : F \to G$ epimorfizmust így: $\vartheta(x) = \vartheta(y) = g$. Vagyis $\mathrm{Im}(\vartheta) =$

G és legyen $E = \ker(\vartheta)$. Nyilván $|F : E| = |G| = \infty$. Határozzunk meg egy transzverzálist E-hez F-ben és E megfelelő szabad (Schreier) generatorait. Mennyi E rangja?

23. Szabad Abel-csoportnak hívjuk $\mathbb{Z}^\kappa$-t, ahol κ egy számosság. Különböző számosságok esetén ezek nem izomorfak. Igaz-e, hogy szabad Abel-csoport részcsoportja is szabad Abel-csoport?

24. *(május 1-ig)* Legyen G véges feloldható csoport, $C = C_G(F(G))$ és $Z = Z(F(G)) = C \cap F(G)$. Mutassuk meg, hogy $O_p(C/Z)$ minden prím esetén triviális, azaz $C = Z$. (Más szóval, $C_G(F(G)) \leq F(G)$.)

25. *(április 25-ig)* Legyen G véges csoport, p pedig olyan prím, amelyre G p-Sylowja ciklikus. Legyen továbbá X véges csoport, $M \leq X' \cap Z(X)$ olyan, hogy $X/M \cong G$. Igazoljuk, hogy p nem osztja $|M|$-et.

26. *(április 25-ig)* Legyen $H \triangleleft G$ Abel normálosztó és $\pi : G \to H$ a transzfer. Mutassuk meg, hogy $\pi(H) \leq Z(G)$. Ha még H Hall-részcsoportakkor $\pi(G) = \pi(H) = H \cap Z(G)$.

27. *(május 7-ig)* Mutassuk meg, hogy $p^2 \equiv 1 \pmod 5$ esetén $\mathrm{SL}(2,5)$ beágyazható $\mathrm{SL}(2,p)$-be. Mutassuk meg, hogy $\mathrm{SL}(2,5)$ hatása $\mathbb{F}_{11}^2 \setminus \{0\}$-n fixpontmentes.

28. *(május 7-ig)* Mutassuk meg, hogy $\mathrm{SL}(2,17)$ 2-Sylowja maximális. (Ez mutatja, hogy Thompson tételében miért kellett feltenni, hogy a nilpotens maximális részcsoport páratlan rendű.)

Innentől kezdve a feladatok tükrözéscsoportokról és gyökrendszerekről szólnak.

29. Legyen $s_i = (i,\ i+1) \leq S_n$, az egyszerű gyökökhöz tartozó tükrözések (A_{n-1})-ben. Bizonyítsuk be, hogy $l(w)$ pont az inverziók száma. Határozzuk meg S_n leghosszabb elemét is.

30. Bizonyítsuk be, hogy egy s, egyszerű tükrözés esetén $l(ws) < l(w)$ pontosan akkor, ha w-nek van s-re végződő $l(w)$-hosszú felírása egyszerű tükrözések szorzataként.

31. Mutassuk meg, hogy ha W_1 Coxeter gráfja Γ_1 és W_2-é Γ_2, akkor $W_1 \times W_2$-é $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

32. Bizbe, hogy $l(w)$ megegyezik a $C = \bigcap\limits_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$ és wC csarnokokat elválasztó H_α falak számával.

33. Adott $\alpha \in \Phi$ és $k \in \mathbb{Z}$ esetén legyen $H_{\alpha,k} = \{\lambda \in V \mid (\lambda, \alpha) = k\}$. Mutassuk meg, hogy a $H_{\alpha,k}$-ra való (affin) tükrözés transzformációja $s_{\alpha,k} : \lambda \mapsto \lambda - ((\lambda,\alpha) - k)\alpha^\vee$. Lássuk be továbbá, hogy $w s_{\alpha,k} w^{-1} = s_{w\alpha,k}$ és ha $(\lambda, \alpha) \in \mathbb{Z}$, valamint $\tau(\lambda)$ a λ-val való eltolás, akkor $\tau(\lambda) s_{\alpha,k} \tau(-\lambda) = s_{\alpha,k+(\lambda,\alpha)}$