Figyelem, minden feladat 1 pontot ér, bár a nehézség változó!

1. Legyen $R = \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$. Bizonyítsuk be, hogy R balNoether de nem jobbNoether.

2. Legyen $N \leq M$. Bizonyítsuk be, hogy ha M pontosan akkor Noether/Artin ha N és M/N is Noether/Artin.

3. Tegyük fel, hogy $R = \bigoplus_{i=1}^{k} A_i = \bigoplus_{j=1}^{n} B_j$ két felbontása R-nek tovább felbonthatatlan (kétoldali) ideálok direkt összegére. Bizonyítsuk be, hogy $k = n$ és a két felbontás csak átrendezésben különbözik.

4. Legyen p prím, G egy véges p-csoport és K egy p-karakterisztikájú test. Mutassuk meg, hogy $J(KG) = \{\sum \alpha_g g \mid \sum \alpha_g = 0\}$.

5. Legyen $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ a 8-adrendű kvaterniócsoport. Határozzuk meg $\mathbb{R}Q$ egyszerű modulusait (irreducibilis reprezentációit) és Wedderburn-Artin felbontását.

6. Legyen K tetszőleges test és $T : G \to \mathrm{GL}(n, K)$ egy nemtriviális irreducibilis reprezentáció. Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{g \in G} T(g) = 0$.

7. Legyen χ egy karaktere G-nek. Hogyan értelmezzük a $\det(\chi)$ lineáris karaktert? Ügyeljünk rá, hogy jóldefiniált legyen!

8. *(május 4-ig)* Bizonyítsuk be, hogy minden irreducibilis karakterfok osztja $|G : Z(G)|$-t.

9. Legyen $H \leq G$ és $\mathcal{C}$ egy konjugáltosztály G-ben. Ekkor $H \cap \mathcal{C} = \cup_i \mathcal{K}_i$ a felbontása H-beli konjugáltosztályokra. Válasszunk reprezentánsokat: $x_i \in \mathcal{K}_i$, $g \in \mathcal{C}$. Bizonyítsuk be, hogy ha χ osztályfüggvénye H-nak, akkor

$$\chi^G(g) = |C_G(g)| \sum_i \frac{\chi(x_i)}{|C_H(x_i)|}.$$

10. Legyen $\mathcal{C}$ olyan konjugáltosztálya G-nek, amely nem része egyetlen valódi normálosztónak sem. Legyen továbbá $m = |\{\omega_\chi(\hat{\mathcal{C}}) \mid \chi \in \mathrm{Irr}(G)\}|$. Mutassuk meg, hogy G minden eleme felírható legfeljebb m $\mathcal{C}$-beli elem szorzataként.

11. Tegyük fel, hogy $A, B \leq G$ olyan részcsoportok, melyekre $AB = G$. Legyen χ osztályfüggvénye A-nak és φ osztályfüggvénye G-nek. Lássuk be, hogy

a) $(\chi^G)_B = (\chi_{A \cap B})^B$ és

b) $\varphi \chi^G = (\varphi_A \chi)^G$.

12. Leírtuk $G \times G$ irreducibils karaktereit G irreducibilis karakterei segítségével. Legyen $G \cong \Delta(G) = \{(g, g) \mid g \in G\} \leq G \times G$. Ha $\eta \in \mathrm{Irr}(G)$, akkor ennek megfelel egy $\Delta(\eta) \in \mathrm{Irr}(\Delta(G))$. Bontsuk fel a $\Delta(\eta)^{G \times G}$ indukált karaktert irreducibilisek összegére. (Különösen esztétikus a válasz kommutatív G esetén.)

13. Határozzuk meg D_{2n} karaktertábláját a 2 indexű ciklikus részcsoportból kiindulva karakterindukálás segítségével. (Legalább $n = 5$ és 6 esetén.)

14. Tegyük fel, hogy G kétszeresen tranzitívan hat Ω-n és $H \leq G$ olyan, hogy $|G : H| < |\Omega|$. Bizonyítsuk be, hogy H hatása tranzitív Ω-n.

15. M-csoport-e S_4?

16. Tegyük fel, hogy $G = N \rtimes K$ és $\psi \in \mathrm{Irr}(N)$ G-invariáns *lineáris* karakter. Bizonyítsuk be, hogy kiterjed G-re.

17. Egy 168-adrendű csoportnak 6 konjugáltosztálya van. Ismerjük három karakterét: α, β és γ. Az alábbi táblázat a konjugáltosztályok méreteit és a rajtuk felvett karakterértékeket tartalmazza.

	1	21	42	56	24	24
α	14	2	0	-1	0	0
β	15	-1	-1	0	1	1
γ	16	0	0	-2	2	2

Határozzuk meg a csoport karaktertábláját.
Talán lesz szükség rá, hogy a $\sqrt{7}$ nincs benne $\mathbb{Q}(\zeta)$-ben, ahol ζ egy primitív 7-dik egységgyök.

18. Egy 720-adrendű csoportnak 11 konjugáltosztája van. Ismerjük két karakterét: α és β. Az alábbi táblázat a konjugáltosztályok méreteit és a rajtuk felvett karakterértékeket tartalmazza.

	1	15	40	90	45	120	144	120	90	15	40
α	6	2	0	0	2	2	1	1	0	-2	3
β	21	1	-3	-1	1	1	1	0	-1	-3	0

Mutassuk meg, hogy a csoportnak van egy 16-odfokú irreducibilis karaktere és írjuk le az értékeit a konjugáltosztályokon.

19. Legyen p prím, K egy p karakterisztikájú algebrailag zárt test és $G = \langle a, b \rangle$ elemi Abel p-csoport. Határozzuk meg az endomorfizmusgyűrűjét az alábbi V_{2n} KG-modulusnak és ezzel bizonyítsuk be, hogy felbonthatatlan.

$$\dim(V_{2n}) = 2n,\ V_{2n} = \langle v_1, \dots, v_n, w_1, \dots w_n \rangle;$$

$$v_i a = v_i + w_i,\ w_i a = w_i b = w_i\ (1 \le i \le n),\ \ v_i b = v_i + w_{i+1}\ (1 \le i \le n-1),\ v_n b = v_n.$$

20. Legyen V egy KG-modulus, $J = J(KG)$ a Jacobson radikál. Bizonyítsuk be, hogy $\mathrm{rad}^i(V) = V \cdot J^i$ és keressünk hasonló leírást $\mathrm{soc}^i(V)$-re. Igazoljuk, hogy $\min\{i : \mathrm{rad}^i(V) = 0\} = \min\{i : \mathrm{soc}^i(V) = V\}$, ezt hívják a modulus Loewy-hosszának.

21. Mi lehet a 2-Sylowja egy olyan csoportnak, amelynek karaktertáblája

φ_1	1	1	1	1	1	1	1
φ_2	1	1	1	ω	ω^2	ω	ω^2
φ_3	1	1	1	ω^2	ω	ω^2	ω
φ_4	3	3	-1	0	0	0	0
φ_5	2	-2	0	-1	-1	1	1
φ_6	2	-2	0	$-\omega$	$-\omega^2$	ω	ω^2
φ_7	2	-2	0	$-\omega^2$	$-\omega$	ω^2	ω

Itt ω primitív 3-dik egységgyök.