Figyelem, minden feladat 1 pontot ér, bár a nehézség változó!

1. *(március 1-ig)* Határozzuk meg az ikozaéder G egybevágóságcsoportjának elemszámát!

2. *(március 1-ig)* Hány eleme van annak a csoportnak, amely az előjeles $2n$-el2mű halmazt permutálja? Azaz $\Omega = \{\pm x_1, \pm x_2, \dots, \pm x_n\}$ és $G = \{\pi \in \mathrm{Sym}(\Omega) \mid x_i\pi = \varepsilon x_j \Leftrightarrow -x_i\pi = -\varepsilon x_j \forall i, j, \varepsilon\}$.

3. Írjuk le csoportelméletileg az ikozaéder egybevágóságcsoportjának struktúráját!

4. Határozzuk meg a 2. feladatbeli csoport struktúráját!

5. *(március 8-ig)* Mutassuk meg, hogy ha a nemkommutatív egyszerű G csoport elemszáma legfeljebb 100, akkor $|G| = 60$.

6. *(március 8-ig)* Igazoljuk, hogy izomorfia erejéig A_5 az egyetlen 60-adrendű egyszerű csoport.

7. *(március 16-ig)* Határozzuk meg $GL_n(K)$ kommutátor részcsoportját. A válasz függ K-tól és n-től.

8. *(március 16-ig)* Határozzuk meg A_5 maximális részcsoportjait (konjugáltság erejéig). Milyen n egészek esetén létezik S_n-nek A_5-tel izomorf primitív részcsoportja?

9. *(március 31-ig)* Van-e $\mathrm{SL}(2,5)$-ben A_5-tel izomorf részcsoport?

10. *(március 31-ig)* Mutassuk meg, hogy $\mathrm{SL}(2,3)$ 2-Sylowja Q-val (kvaternió-csoporttal) izomorf normálosztó.

11. (Gaschütz) Legyen p prím, V egy Abel p-normálosztója a véges G csoportnak. Legyen $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ tetszőleges. Bizonyítsuk be, hogy akkor és csak akkor létezik V-nk komplementuma G-ben, ha P-ben létezik.

12. Legyen $G = H \ltimes N$, ahol $(|H|, |N|) = 1$. Mutassuk meg, hogy $N_G(H) = H \times C_N(H)$. Legyen továbbá p egy prímosztója $|N|$-nek. Mutassuk meg, hogy N-nek van H-invariáns p-Sylow részcsoportja.

13. *(április 7-ig)* Legyen $G = AB$ véges, ahol $A, B \le G$. Ha $S \le G$ olyan p-részcsoport, amely tartalmazza A-nak és B-nek is egy-egy p-Sylow részcoportját, akkor $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$ és $S = (S \cap A)(S \cap B)$.

14. *(április 7-ig)* Legyen G véges, $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Mutassuk meg, hogy ha $x, y \in C_G(P)$ konjugáltak, akkor a konjugáló elem vehető $N_G(P)$-ből.

15. *(május 1-ig)* Legyen G véges feloldható csoport, $C = C_G(F(G))$ és $Z = Z(F(G)) = C \cap F(G)$. Mutassuk meg, hogy $O_p(C/Z)$ minden prím esetén triviális, azaz $C = Z$. (Más szóval, $C_G(F(G)) \leq F(G)$.)

16. *(május 1-ig)* Legyen F szabadcsoport X-en. Mutassuk meg, hogy F' azokból a szavakból áll, amelyekben minden generátor kitevőösszege 0 (más szóval, a szóban az x-ek száma és az x^{-1}-ek száma egyezzen meg minden $x \in X$ esetén).

17. *(május 1-ig)* Legyen F szabad csoport. Két $a, b \in F$ elemére pontosan akkor teljesül $ab = ba$, ha $\exists u \in F$, $h, k \in \mathbb{Z}$, amelyekre $a = u^h$, $b = u^k$. (Azaz a, b pontosan akkor felcserélhető, ha egy azonos szó hatványai.)