Figyelem, minden feladat 1 pontot ér, bár a nehézség változó!

1. Bizonyítsuk be, hogy Schützenberger involúciója tényleg másodrendű. (Azaz, ha egy T sztenderd Young tablóra megcsinálom, majd a kapott T' tablóra megint, akkor visszakapom T-t.)

2. Amikor bebizonyítottuk, hogy a sorbaillesztés és az oszlaopbaillesztés felcserélhető ($r_x(c_y(T)) = c_y(r_x(T))$), akkor néhány esetet láttunk csak be. Azt nem, amikor T legnagyobb száma nagyobb x-nél és y-náll és a $c_y(T)$, $r_x(T)$ beillesztések nem ugyanabban a cellában érnek véget. Bizonyítsuk be azt az esetet, amikor $c_y(T)$ oszlopától eggyel jobbra van $r_x(T)$ oszlopa.

3. Legyen $\pi \in S_n$, $T = P(\pi)$ az illesztőtablója. Bizonyítsuk be, hogy π-ben a leghosszabb k-csökkenő részsorozat hossza megegyezik T első k oszlopának összhosszával. (Egy sorozat k-csökkenő, ha k darab csökkenő sorozat összefésüléseként előáll.)

4. Igaz, vagy hamis: Ha $\pi \in S_n$ illesztőtablójának két sora van, melyek a és $b = n - a$ hosszúak, akkor π előáll két növekvő részsorozat összefésüléseként, melyek a és b hosszúak.

5. Legyen $\pi \in S_n$ másodrendű. Lássuk be, hogy $P(\pi) = Q(\pi)$ és π a fixpontjainak száma egyenlő $P(\pi)$ páratlan hosszú oszlopainak számával.

6. Bizonyítsuk be, hogy

$$(2n-1)!! = \sum_{\substack{\lambda \vdash 2n \\ \lambda \text{ páros}}} f^\lambda,$$

ahol $k!! = k(k-2)(k-4)\cdots$ a szemifaktoriális és egy partíció páros, ha minden része páros.

7. Legyen $\lambda \vdash n$ és tekintsük a következő induktív algoritmust λ üres diagramján ($h_c = h_{i,j}$ a $c = (i, j)$ cella kampóhossza):

1. Válasszunk egy c cellát egyenletesen $1/n$ valószínűséggel.
2. Ha nem sarokcella, akkor válasszunk egy c-től különböző d cellát egyenletesen $1/(h_c - 1)$ valószínűséggel c kampójából. Legyen most ez c és ismételjük ezt a lépést.
3. Ha már c sarokcella, akkor írjuk bele n-et és a maradék diagramra folytassuk az eljárást az 1. lépéssel (n helyett persze $n-1$-gyel).

Bizonyítsuk be, hogy az algoritmus eredménye egy λ alakú sztenderd Young tabló. Jóbarátunk elárulja, hogy annak a valószínűsége, hogy n az (a,b) sarokba kerül

$$\frac{1}{n}\prod_{i=1}^{a-1}\left(1+\frac{1}{h_{i,b}-1}\right)\prod_{j=1}^{b-1}\left(1+\frac{1}{h_{a,j}-1}\right).$$

Ebből bizonyítsuk be, hogy minden tablót egyenletesen

$$\frac{1}{n!}\prod_{c\text{ egy }\lambda\text{-cella}} h_c$$

valószínűséggel kapunk meg.

8. A kvaterniócsoport, Q hat az $\{1,i,j,k\}$ által formálisan generált 4-dimenziós vektortéren a jobbról szorzással. (Ez volt Hamilton eredeti ötlete, amikor a kvaterniókat bevezette.) Pl $-i$ lenti mátrixában a harmadik sor jelentése $j\cdot(-i) = k = 0\cdot 1 + 0\cdot i + 0\cdot j + 1\cdot k$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ezt a hatást tetszőleges test fölött értelmezhetjük, mivel minden mátrixegyüttható egész szám. Határozzuk meg az ednomorfizmusgyűrűt (a centralizátor algebrát) $\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{F}_2$ és $\mathbb{F}_3$ felett.

9. Legyen V az S_n szimmetrikus csoport természetes, n dimenziós modulusa (aminek a bázisát közönségesen permutálják S_n elemei). Határozzuk meg az endomorfizmusgyűrűjét (a centralizátor algebráját). Persze V-t tekinthetjük G-modulusnak is, ha $G \le S_n$ permutációcsoport. Bizonyítsuk be, hogy a centralizátor algebra dimenziója pontosan akkor 2, ha G 2-tranzitív (vagyis bármely két $\{1,\ldots,n\}$-beli szám képét előírva találunk G-beli elemet, ami ezeket azokba viszi).

10. Az előadáson meghatároztuk S_4 karaktertábláját. Mivel S_4 izomorf a szabályos tetraéder egybevágóság-csoportjával, ezért kapunk egy természetes $A: S_4 \to \mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$ reprezentációt. Határozzuk meg A karakterét és annak az irreducibilis felbontását. Hasonlóan, S_4 izomorf a kocka mozgáscsoportjával (irányítástartó egybevágóságok), ezért kapunk egy $B: S_4 \to \mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$ reprezentációt. Határozzuk meg B karakterét és annak az irreducibilis felbontását.

11. (EZT A FELADATOT ELÉG $k \ge n-1$ ESETÉN MEGOLDANI.) Legyen $G = S_k \times S_{n-k} \le S_n$, ahol $n/2 \le k \le n-1$. Minden eleme $g_1 g_2$ alakban írható, ahol g_1 permutálja $\{1,\dots,k\}$-t, míg g_2 $\{k+1,\dots,n\}$-et permutálja. Ennek triviális karaktere 1_G. Határozzuk meg az $1_G^{S_n}$ indukált karakter értékét minden $\sigma \in S_n$-re. Mutassuk meg, hogy $1_G^{S_n}$ $n-k+1$ darab különböző irreducibilis karakter összegére bomlik.

12. (EZT A FELADATOT ELÉG $k \geq n-1$ ESETÉN MEGOLDANI.) Legyen $G = S_k \times S_{n-k} \leq S_n$, ahol $1 \leq k \leq n-1$. Minden eleme $g_1 g_2$ alakban írható, ahol g_1 permutálja $\{1,\dots,k\}$-t, míg g_2 $\{k+1,\dots,n\}$-et permutálja. Ennek van egy elsőfokú (irreducibilis) karaktere: $\mu(g_1g_2) = \mathrm{sgn}(g_1)$. Határozzuk meg a μ^{S_n} indukált karakter értékét minden $\sigma \in S_n$-re. Mutassuk meg, hogy μ^{S_n} két különböző irreducibilis karakter összegére bomlik.

13. (Dominancia Lemma) Legyen S egy μ alakú és T egy λ alakú tabló, amelyekre igaz, hogy ha $1 \leq i,j \leq n$ S-ben egy sorban vannak, akkor T-ben nincsenek egy oszlopban. Bizonyítsuk be, hogy $\lambda \trianglerighteq \mu$.

14. Beláttuk az előadáson, hogy

$$S^\lambda \downarrow_{S_{n-1}} = \bigoplus_{c \in B_\lambda} S^{\lambda \setminus \{c\}},$$

ahol B_λ a λ diagramjában lévő belső sarkokat jelöli.

Bizonyítsuk be, hogy

$$S^\lambda \uparrow^{S_{n+1}} = \bigoplus_{c \in K_\lambda} S^{\lambda \cup \{c\}},$$

ahol K_λ a λ diagramjában lévő külső sarkokat jelöli.

15. Legyen $\pi \in S_n$ és $\pi = \sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\cdots\sigma_{i_k}$ a(z egyik) legrövidebb felírása $\sigma_i = (i, i+1)$ „Coxeter generátorok” szorzataként. Bizonyítsuk be, hogy k megegyezik π inverzóinak számával. Valamint $j \in D(\pi)$ pontosan akkor, ha $\sigma_j\pi$ minimális felírása $k-1$ Coxeter generátorból áll (ha $j \notin D(\pi)$, akkor $\sigma_j\pi = \sigma_j\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\cdots\sigma_{i_k}$ az egyik legrövidebb felírása, ez $k+1$ elemű).

16. Konstruáljunk $\mathbb{R}^n$-ben n darab origón átmenő H_i hipersíkot, amelyekre H_i és H_{i+1} szöge $60°$, valamint $|i-j| > 1$ esetén H_i és H_j merőlegesek. Ezen a síkokra való tükrözéseket σ_i-nek hívva kapjuk S_{n+1} Coxeter generátorait.

17. Bizonyítsuk be, hogy minden alternáló $f(\mathbf{x})$ polinom előáll az alternánsok lineáris kombinációjaként, azaz $f(\mathbf{x}) = \sum c_\lambda a_{\lambda+\delta}(\mathbf{x})$ alakban.

18. Határozzuk meg $h_{(4,3,2)}(\mathbf{x})$-t és $e_{(4,3,2)}(\mathbf{x})$-t a Schur polinomok lineáris kombinációjaként.