Kommutatív algebra és algebrai geometria feladatsor

Nagy Gábor Péter, BME Algebra Tanszék

2016. szeptember 25.

A továbbiakban gyűrű alatt egységelemes kommutatív gyűrűt értünk.

1. Gyűrűk és ideálok

1.1. feladat. Legyen x az A gyűrű egy nilpotens eleme. Mutassuk meg, hogy $1+x$ egység A-ban. Mutassuk meg, hogy egy egység és egy nilpotens elem összege egység.

1.2. feladat. Legyen A gyűrű és legyen $A[x]$ az A-beli együtthatós, x változós polinomok gyűrűje. Legyen $f = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in A[x]$. Bizonyítsuk be, hogy

(i) f egység $A[x]$-ben $\Leftrightarrow$ a_0 egység A-ban és $a_1, \ldots, a_n$ nilpotensek. [Útmutatás: Ha $b_0 + \cdots + b_mx^m$ az f inverze, akkor r szerinti indukcióval mutassuk meg, hogy $a_n^{r+1}b_{m-r} = 0$. Ekkor a_n nilpotens, és alkalmazhatuk az előző feladatot.]

(ii) f nilpotens $\Leftrightarrow$ $a_0, \ldots, a_n$ nilpotensek.

(iii) f zérusosztó $\Leftrightarrow$ valamely $0 \neq a \in A$ elemre $af = 0$. [Útmutatás: Legyen $g = b_0 + \cdots + b_mx^m$ legalacsonyabb fokú polinom, amire $fg = 0$. Ekkor $a_nb_m = 0$, tehát $a_ng = 0$ (mivel $a_ngf = 0$ és a_ng foka $< m$.) Mutassuk meg indukcióval, hogy $a_{n-r}g = 0$.]

(iv) Az f polinom *primitív,* ha $(a_0, \ldots, a_n) = (1)$. Bizonyítsuk be, hogy $f, g \in A[x]$ esetén fg primitív $\Leftrightarrow$ f, g primitívek.

1.3. feladat. Az $A[x]$ gyűrűben a Jacobson-radikál megegyezik a nilradikállal.

1.4. feladat. Legyen A gyűrű és legyen $A[[x]]$ az A-beli együtthatós, x változós formális hatványsorok gyűrűje. Legyen $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \in A[[x]]$. Mutassuk meg, hogy

(i) f egység $A[[x]]$-ben $\Leftrightarrow$ a_0 egység A-ban.

(ii) Ha f nilpotens, akkor a_n nilpotens A-ban minden $n > 0$ esetén.

(iii) f az $A[[x]]$ Jacobson-radikáljában van $\Leftrightarrow$ a_0 az A Jacobson-radikáljában van.

(iv) Az $M \triangleleft A[[x]]$ maximális ideál kontrakciója maximális ideál A-ban, és M-et M^c és x generálja.

(v) Minden A-beli prímideál egy $A[[x]]$-beli prímideál kontrakciója.

1.5. feladat. Legyen A olyan gyűrű, amiben minden olyan ideál tartalmaz nem nulla idempotens elemet, amely nem része a nilradikálnak. ($e \in A$ *idempotens,* ha $e = e^2$.) Bizonyítsuk be, hogy a nilradikál és a Jacobson-radikál megegyeznek.

1.6. feladat. Legyen A olyan gyűrű, amiben minden x elemre teljesül $x^n = x$ valamilyen (x-től függő) $n > 1$ egésszel. Mutassuk meg, hogy A-ban minden prímideál maximális.

1.7. feladat. Legyen $A \neq 0$ gyűrű. Mutassuk meg, hogy az A-beli prímideálok halmazában van tartalmazásra nézve minimális elem.

1.8. feladat. Legyen $I \neq (1)$ az A gyűrű egy ideálja. Mutassuk meg, hogy $\sqrt{I} = I \Leftrightarrow I$ prímideálok metszete.

1.9. feladat. Legyen A gyűrű, $\mathcal{N}$ a nilradikálja. Mutassuk meg, hogy az alábbiak ekvivalensek:

(i) A-nak pontosan egy prímideálja van;

(ii) A minden eleme egység vagy nilpotens;

(iii) $A/\mathcal{N}$ test.

1.10. feladat. A-t *Boole-gyűrűnek* nevezzük, ha $x = x^2$ teljesül minden $x \in A$ elemre. Mutassuk meg, hogy egy A Boole-gyűrűben teljesülnek az alábbiak:

(i) $2x = 0$ minden $x \in A$ elemre.

(ii) Bármely P prímideál maximális, és A/P kételemű test.

(iii) Minden végesen generált ideál főideál.

1.11. feladat. Egy lokális gyűrűben nincs $\neq 0, 1$ idempotens elem.

2. Modulusok

2.1. feladat.

(i) $\mathrm{Ann}(M + N) = \mathrm{Ann}(M) \cap \mathrm{Ann}(N)$.

(ii) $(N : P) = \mathrm{Ann}((N + P)/N)$.

2.2. feladat. Mutassuk meg, hogy ha m, n relatív prím egészek, akkor $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$.

2.3. feladat. Legyen A gyűrű, $I \triangleleft A$ ideál, M pedig egy A-modulus. Mutassuk meg, hogy $(A/I) \otimes_A M \cong M/IM$. [Útmutatás: Tenzoráljuk M-el a $0 \to I \to A \to A/I \to 0$ egzakt sorozatot.]

2.4. feladat. Legyen A egy lokális gyűrű, és U, V végesen generált A-modulusok. Bizonyítsuk be, hogy ha $U \otimes V = 0$, akkor $U = 0$ vagy $V = 0$.

[Útmutatás: Legyen M maximális ideál A-ban és $k = A/M$ a reziduum test. Legyen $U_k = k \otimes_A U$; az előző feladat szerint $U_k \cong U/MU$. A Nakayama-lemma szerint $U_k = 0 \Rightarrow U = 0$. Mivel $k \otimes_A k \cong k$, így

$$(U \otimes_A V)_k = (U \otimes_A V) \otimes_A k = (U \otimes_A k) \otimes (V \otimes_A k) = U_k \otimes_A V_k.$$

Mivel M triviálisan hat U_k, V_k-n így $U_k \otimes_A V_k = U_k \otimes_k V_k$. Tehát $U \otimes_A V = 0 \Rightarrow (U \otimes_A V)_k = U_k \otimes_k V_k = 0 \Rightarrow U_k = 0$ vagy $V_k = 0$, mivel U_k, V_k vektorterek k felett.]

2.5. feladat. Tetszőleges M A-modulus esetén jelölje $M[x]$ az M-beli együtthatós, x változós polinomok halmazát, vagyis

$$m_0 + m_1 x + \cdots + m_r x^r, \qquad m_i \in M$$

alakú kifejezéseket. Értelmezzük az $A[x]$ elemeinek $M[x]$ elemeivel vett szorzatát a nyilvánvaló módon. Mutassuk meg, hogy $M[x]$ $A[x]$-modulus. Mutassuk meg, hogy $M[x] \cong A[x] \otimes_A M$.

2.6. feladat. Legyen $P \triangleleft A$ prímideál. Mutassuk meg, hogy $P[x]$ prímideál $A[x]$-ben. Igaz-e, hogy M maximális ideál esetén $M[x]$ maximális $A[x]$-ben?

2.7. feladat. Legyen $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ A-modulusok egzakt sorozata. Mutassuk meg, hogy ha M', M'' végesen generáltak, akkor M is.

2.8. feladat. Legyen A gyűrű, $I \triangleleft A$ ideál, ami része A Jacobson-radikáljának. Legyen M A-modulus és N végesen generált A-modulus. Legyen $u : M \to N$ homomorfizmus. Mutassuk meg, hogy ha az indukált $M/IM \to N/IN$ homomorfizmus szürjektív, akkor u is szürjektív.

2.9. feladat. Legyen $A \neq 0$ gyűrű. Mutassuk meg, hogy ha A^m és A^n izomorfak mint A-modulusok, akkor $m = n$.

[Útmutatás: Legyen M maximális ideál A-ban és legyen $\phi : A^m \to A^n$ izomorfizmus. Ekkor $1 \otimes \phi : (A/M) \otimes_A A^m \to (A/M) \otimes_A A^n$ vektor terek közötti A/M-izomorfizmus. Ekkor a megfelelő dimenziók megegyeznek: $m = n$.]

Mutassuk meg, hogy ha $\phi : A^m \to A^n$ szürjektív, akkor $m \geq n$.

2.10. feladat. Legyen M végesen generált A-modulus és $\phi : M \to A^n$ szürjektív homomorfizmus. Mutassuk meg, hogy $\ker(\phi)$ végesen generált.

[Útmutatás: Legyen $e_1, \ldots, e_n$ bázis A^n-ben és $u_i \in M$ olyan elem, amire $\phi(u_i) = e_i$, $(1 \leq i \leq n)$. Mutassuk meg, hogy M a $\ker(\phi)$ és az $u_1, \ldots, u_n$ elemek által generált részmodulus direkt összege.]

2.11. feladat. Legyen $f : A \to B$ gyűrűhomomorfizmus, és legyen N B-modulus. A skalárokat megszorítva tekintsük N-et A-modulusként, majd definiáljuk az $N_B = B \otimes_A N$ B-modulust a skalárok kiterjesztésével. Mutassuk meg, hogy a $g : N \to N_B$ homomorfizmus, ami az $y \in N$ elemet az $1 \otimes y$ elembe viszi, injektív, és hogy $g(N)$ az N_B direkt összeadandója.

[Definiáljuk a $p : N_B \to N$, $p(b \otimes y) = by$ leképezést és mutassuk meg, hogy $N_B = \mathrm{Im}(g) \oplus \ker(p)$.]