1	2-8	9-12	13-	Σ

NÉV ______________________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 2 **3. vizsga – elmélet** **2017-06-14**

A tesztkérdésekre 20, a definíciók, tételek precíz megfogalmazására 10, a bizonyítások tömör, világos, korrekt leírására 10 pont kapható. A válaszokat írjuk a kérdéshez tartozó üres dobozba! Kidolgozási idő 60 perc. Segédeszköz nem használható!

1. Mindegyik állításról állapítsuk meg, hogy igaz vagy hamis (I|H)! *(6 pont)*

a) Az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha a $\mu_{\mathbf{A}}$ minimálpolinomnak nincs többszörös gyöke!

b) Ha az $\mathbf{A}$ mátrix nilpotens, akkor $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ invertálható!

c) Minden legalább 2×2-es pozitív szemidefinit mátrixnak több négyzetgyöke is van, amelyek közül pontosan egy pozitív szemidefinit.

d) A valós együtthatós hatványsorok terének bázisát alkotják az x^n függvények.

e) Minden d-edrendű lineáris differenciaegyenlet megoldásai d-dimenziós alteret alkotnak a sorozatok vektorterében!

f) A komplex bilineáris függvények és a komplex kvadratikus alakok közt bijekció van, de valós bilineáris függvények és kvadratikus alakok közt csak az 1-változós esetben van bijekció.

2. Melyik altér az alábbi függvényhalmazok közül az egész számegyenesen értelmezett valós függvények $\mathbb{R}$ feletti vektorterében? *(a)* az egész együtthatós polinomok, *(b)* a valós együtthatós polinomok, *(c)* a differenciálható függvények, *(d)* az $[a, b]$ intervallumon kívül azonosan 0 függvények, *(e)* azon f függvények, melyekre $f(0) = 1$. *(2 pont)*

3. Sorolja fel azokat a feltételeket, melyek mellett egy kétváltozós $f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény szeszkvilineáris (más néven komplex bilineáris)! *(2 pont)*

4. Mik a sajátértékei a tér vektorait *(a)* egy síkra tükröző lineáris leképezésnek és *(b)* mik egy egyenes körüli forgatásnak? *(2 pont)*

5. Soroljuk fel, hogy az alábbi valós mátrixok ortogonálisan milyen egyszerűbb alakú mátrixhoz hasonlóak? *(A)* szimmetrikus, *(B)* ferdén szimmetrikus, *(C)* melynek minden sajátértéke valós. *(2 pont)*

6. Milyen képlet definiálja a $\|.\|_a$ vektornorma által indukált mátrixnormát? Soroljon fel két különböző képletet is. *(2 pont)*

7. Legyen $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ a valós $\mathcal{V}$ vektortér egy $\mathcal{W}$ alterének ortonormált bázisa és $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ egy tetszőleges vektor. Mit ad meg a következő valós szám? *(2 pont)*

$$\left|\mathbf{v} - \sum_{i=1}^{k} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{v}_i\right|$$

8. Az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei λ_1 és λ_2. $\mathbf{A}$ Jordan-féle normálalakjában a λ_1-hez tartozó Jordan-blokkok mérete 3, 3, 1, 1, a λ_2-höz tartozók mérete 4, 2. Írjuk fel $\mathbf{A}$ karakterisztikus és minimálpolinomját, és határozzuk meg λ_1 algebrai és geometriai multiplicitását! *(2 pont)*

9. Mi a vektortér definíciója? *(2 pont)*

10. Mit értünk bilineáris függvény Gram-mátrixán? *(2 pont)*

11. Mondjuk ki az Eckart–Young-tételt! *(3 pont)*

12. Soroljuk fel az ortogonális mátrixok legalább 3 különböző tulajdonságát! *(3 pont)*

13. Mondjuk ki és bizonyítsuk be a Cayley–Hamilton-tételt! *(6 pont)*

14. Igazoljuk, hogy tetszőleges valós $\mathbf{A}$ mátrix esetén $\mathbf{A}^\top\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit! *(4 pont)*