E	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

NÉV ______________________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 2 **3. vizsga – gyakorlat** **2017-06-14**

Minden kérdésre írjuk a válaszokat a mellette lévő dobozba. Az első feladat nyolc egyszerű kérdését kivéve minden feladat megoldását is ellenőrizzük, pontszámot a teljes megoldás alapján adunk. Az első nyolc feladat mindegyike 2 pontot, a továbbiak 8 pontot érnek. Kidolgozási idő 110 perc. Semmilyen segédeszköz nem használható!

E1. Írjuk fel az n-dimenziós tér egy origón átmenő hipersíkjára való tükrözés karakterisztikus és minimálpolinomját!

$\chi(x) = (-1-x)(1-x)^{n-1}$
$= (-1)^n(x+1)(x-1)^{n-1}$,
$\mu(x) = x^2 - 1$

E2. Írjuk fel az $\mathrm{e}^{\mathbf{J}t}$ mátrixot, ahol

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

$\mathrm{e}^{\mathbf{J}t} = \mathrm{e}^{\lambda t}(\mathbf{I} + t\mathbf{N} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{N}^2)$.

E3. Írjuk fel az $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}$ differenciaegyenlet összes megoldását!

$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) \rightsquigarrow x_n = c_1 + c_2 2^n$.

E4. Az alábbi mátrixok közül melyiknek a hatványai konvergálnak, és azok közül melyiknek a hatványai tartanak a zérusmátrixhoz?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ konvergál, $\mathbf{B}$ a $\mathbf{O}$-hoz.

E5. Mennyi az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix 1-, 2- és Frobenius-normája?

$\|\mathbf{A}\|_1 = 8$, $\|\mathbf{A}\|_2 = \sigma_1 = 10$, $\|\mathbf{A}\|_F = 10$.

E6. Az $\mathbf{A}$ mátrix spektrálfelbontása $\mathbf{A} = -\mathbf{P}_1 + 3\mathbf{P}_2$. Számítsuk ki az $\mathbf{A}^3 - 5\mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A} + 8\mathbf{I}$ mátrixot a vetítőmátrixok segítségével!

$p(-1) = 0$, $p(3) = -4$, így

$$\mathbf{A}^3 - 5\mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A} + 8\mathbf{I} = -4\mathbf{P}_2.$$

E7. Adjunk minél jobb felső becslést az alábbi $\mathbf{A}$ mátrix spektrálsugarára a Gersgorin-körök alapján!

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

5

E8. Határozzuk meg a $q(x,y) = 2\bar{x}x + (1-\mathrm{i})\bar{y}x + (1+\mathrm{i})\bar{x}y + y\bar{y}$ kvadratikus alak jellegét!

pozitív szemidefinit, mert sajátértékei 0 és 3.

---

1. Legyen $\mathcal{B} = \{(1, -3\mathrm{i}), (\mathrm{i}, 2)\}$ a $\mathbb{C}^2$ egy bázisa, és

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Írjuk fel az $A\colon \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ lineáris transzformáció, illetve a $\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{y}$ bilineáris függvény mátrixát a $\mathcal{B}$ bázisban!

$\begin{bmatrix} 1-5i & 3 \\ 8 & 1+5i \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 10+6i & -5+7i \\ 5-7i & 5+4i \end{bmatrix}$

2. Hozzuk kanonikus alakra az

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 - 6 = 0$$

egyenletű másodrendű görbét és ábrázoljuk az eredeti koordináta-rendszerben! Milyen a másodfokú rész által alkotott kvadratikus alak jellege?

$x^2 + y^2/6 = 1$, pozitív definit, sajátpárok: $(6,(2,1))$, $(1,(1,-2)$

3. Írjuk fel az

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix spektrálfelbontását és bontsuk fel a $(3,-1,3)$ vektort a mátrix sajátaltereibe eső vektorok összegére!

Sajátpárok:
$(9,(1,1,0))$, $(1,(1,-1,0))$, $(1,(0,0,1))$, spektrálfelbontás:

$$9\begin{bmatrix} \frac12 & \frac12 & 0 \\ \frac12 & \frac12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac12 & -\frac12 & 0 \\ -\frac12 & \frac12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(3,-1,3) = (1,1,0) + (2,-2,3)$

4. Határozzuk meg a

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix teljes és redukált szinguláris felbontását és pszeudoinverzét!

Teljes:

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

redukált: $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$

pszeudoinverz: $\frac13 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Legyenek egy 8×8-as $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei: 1, 3, 5. Az $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ mátrix hatványai magterének dimenziója rendre legyen 2, 3, 4, 4, az $\mathbf{A} - 3\mathbf{I}$ mátrix esetén 1, 2, 3, 3. Írjuk fel $\mathbf{A}$ Jordan-féle normálalakját!

Az 1 négyszeres, a 3 háromszoros, így az 5 egyszeres multiplicitású:

$$\left[\begin{array}{cc|cc|ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

6. Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix Jordan-féle normálalakját. Adjuk meg a Jordan-láncokat!

Jordan-láncok: $\mathbf{0} \leftarrow (3,0,0,0) \leftarrow (0,1,0,0)$, $\mathbf{0} \leftarrow (0,0,4,0) \leftarrow (0,0,0,1)$,

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad e^{2\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} e^2 & 6e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 & 8e^2 \\ 0 & 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix}$$

7. Householder-tükrözésekkel határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontásának $\mathbf{R}$ mátrixát (a $\mathbf{Q}$-t nem kell kiszámolni)!

Két householder:

$$\mathbf{H}_1 = \frac13 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac45 & -\frac35 \\ 0 & \frac35 & \frac45 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

8. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomja az x polinommal való maradékos osztás után $\chi(x) = q(x)x + c$, ahol $0 \neq c \in \mathbb{R}$. Fejezzük ki az $\mathbf{A}^{-1}$ mátrixot az $\mathbf{A}$ polinomjaként!

$q(\mathbf{A})/(-c)$.