E	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

NÉV ______________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 2 **1. vizsga – gyakorlat** **2017-05-31**

Minden kérdésre írjuk a válaszokat a mellette lévő dobozba. Az első feladat nyolc egyszerű kérdését kivéve minden feladat megoldását is ellenőrizzük, pontszámot a teljes megoldás alapján adunk. Az első nyolc feladat mindegyike 2 pontot, a továbbiak 8 pontot érnek. Kidolgozási idő 110 perc. Semmilyen segédeszköz nem használható!

E1. Adjuk meg annak a Givens-forgatásnak a mátrixát, amely a $(2, 3)$ vektort a $(\sqrt{13}, 0)$ vektorba viszi!

$\begin{bmatrix} 2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \\ -3/\sqrt{13} & 2/\sqrt{13} \end{bmatrix}$

E2. Írjuk fel az $e^{\mathbf{J}^2}$ mátrixot, ha $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} e^9 & 6e^9 \\ 0 & e^9 \end{bmatrix}$

E3. Írjuk fel a háromdimenziós tér egy origón átmenő síkjára való vetítés karakterisztikus és minimálpolinomját!

$-x(x-1)^2$ és $x(x-1)$

E4. Mi az $x_1^2 - 2x_1x_2$ kvadratikus alak mátrixa és jellege?

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, indefinit

E5. Mi a $\mathbb{C}^3$-beli $\mathbf{a} = (1, i, 1+i)$ és $\mathbf{b} = (-1+i, 1, 2)$ vektorok skalárszorzata és távolsága?

$1 - 2i$ és 3

E6. Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix 2-normáját és Frobenius-normáját!

$\sqrt{10}$ és 3

E7. Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ olyan szimmetrikus mátrix $\mathbb{R}^{2\times 2}$-ben, amelynek sajátvektora az $(1, 2)$ vektor. Adjunk meg olyan $\mathbf{P}$ mátrixot, amelyre $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ biztosan diagonális!

$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

E8. Adjunk minél jobb felső becslést az alábbi $\mathbf{A}$ mátrix spektrálsugarára a Gersgorin-körök alapján!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

3

---

1. Számítsuk ki Gram–Schmidt-ortogonalizálással az $\mathbf{A}$ mátrix redukált QR-felbontását, és ebből az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer optimális megoldását, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$

2. Az a paraméter milyen valós értékeire igaz, hogy az alábbi $\mathbf{A}$ mátrix diagonalizálható, de unitérrel nem diagonalizálható $\mathbb{C}$ fölött?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 3 \end{bmatrix}$$

$a \neq \pm 1$

3. Számítsuk ki az $\mathbf{A}$ mátrix redukált és teljes SVD-felbontását, és $\mathbf{A}$ pszeudoinverzét, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{A}^+ = \begin{bmatrix} 3/25 & 4/25 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Legyen $\mathcal{B} = \{(1, -i), (2i, 3)\}$ a $\mathbb{C}^2$ egy bázisa, és

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Írjuk fel az $f \colon \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ lineáris transzformáció, illetve a $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^* A\mathbf{y}$ bilineáris függvény mátrixát a $\mathcal{B}$ bázisban!

$$\begin{bmatrix} 1-4i & 8 \\ 2 & 1+4i \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{bmatrix} 2+2i & -4+5i \\ 6-5i & 13+12i \end{bmatrix}$$

5. Határozzuk meg az alábbi $\mathbf{A}$ mátrix Jordan-normálalakját, Jordan-bázisát és 10. hatványát!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{A}^{10} = \begin{bmatrix} 2^{10} & -10 \cdot 2^9 & 10 \cdot 2^9 \\ 0 & 2^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{bmatrix}$$

6. Oldjuk meg a következő kezdetiérték-problémát!

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2e^{2t} - e^t \\ e^t \end{bmatrix}$$

7. Állítsuk elő az $(\mathbf{A} - \mathbf{I})^{-1}$ mátrixot az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

mátrix lineáris polinomjaként! (Használhatjuk az Hermite-interpolációt.)

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})^{-1} = -\tfrac{1}{4}\mathbf{A} - \tfrac{3}{4}\mathbf{I}$$

8. Tegyük fel, hogy a 7×7-es $\mathbf{A}$ mátrixra $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ hatványainak rangja $5, 4, 3, 3, \ldots$, míg $\mathbf{A} + 2\mathbf{I}$ hatványainak a rangja $5, 4, 4, \ldots$. Mi az $\mathbf{A}$ mátrix Jordan-normálalakja, karakterisztikus polinomja és minimálpolinomja?

$\chi(x) = (1-x)^4(-2-x)^3$, $\mu(x) = (x-1)^3(x+2)^2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|cc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$