1	2-8	9-12	13-	Σ

NÉV ______________________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 2 **2. vizsga – elmélet – elmélet** **2017-06-07**

A tesztkérdésekre 20, a definíciók, tételek precíz megfogalmazására 10, a bizonyítások tömör, világos, korrekt leírására 10 pont kapható. A válaszokat írjuk a kérdéshez tartozó üres dobozba! Kidolgozási idő 60 perc. Segédeszköz nem használható!

1. Mindegyik állításról állapítsuk meg, hogy igaz vagy hamis (I|H)! *(6 pont)*

a) Egy mátrix minimálpolinomja pontosan akkor egyezik meg a karakterisztikus polinomjával (vagy annak -1-szeresével), ha Jordan-normálalakjában minden sajátértékhez egyetlen Jordan-blokk tartozik! I

b) A vektorterek izomorfiája ekvivalenciareláció. I

c) Egyetlen zérusmátrixtól különböző nilpotens mátrix sem diagonalizálható! I

d) Egy pozitív szemidefinit mátrixnak van olyan ortogonális diagonalizálásból származó sajátfelbontása, mely megegyezik szinguláris felbontásával. I

e) Minden valós n-edfokú p polinomhoz van olyan valós $n \times n$-es mátrix, melynek p a minimálpolinomja. H

f) Minden valós mátrix ortogonálisan hasonló egy olyan valós mátrixhoz, melyben a szubdiagonális (azaz közvetlenül a főátló alatti) elemek alatt minden elem 0. I

2. Melyik altér az alábbiak közül az $\mathbf{R}$ feletti polinomok $\mathbf{R}[x]$ vektorterében? *(a)* azok az $\mathbf{R}[x]$-beli polinomok, amelyeknek a -1 gyöke, *(b)* a páros fokú $\mathbf{R}[x]$-beli polinomok, *(c)* a legfeljebb n-edfokú valós együtthatós polinomok, *(d)* amelyek integrálja a $[0, 1]$ intervallumon 0. *(2 pont)*

(a) igen, *(b)* nem, *(c)* igen, *(d)* igen.

3. Mi egy $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ mátrix nullterének (komplex) merőleges kiegészítője? *(2 pont)*

$\mathcal{O}(\mathbf{A}^{\mathsf{H}})$ vagy $\mathcal{S}(\bar{\mathbf{A}})$.

4. Milyen feltételek mellett konvergens a $\lim_{n\to\infty} \mathbf{A}^n$ sorozat?

$\rho(\mathbf{A}) < 1$ vagy $\rho(\mathbf{A}) = 1$ és a spektrálkörön $\lambda = 1$ az egyeteln sajátérték, és a $\lambda = 1$ algebrai és geometriai multiplicitása azonos.

5. Mit tudunk egy mátrix főminorairól, ha a mátrix negatív definit?

Előjelei rendre $- + - + \dots$

6. Legyen $\mathbb{F}$ egy test. Melyek az $\mathbb{F} \to \mathbb{F}$ lineáris leképezések?

Az $x \mapsto cx$ leképezések, ahol $c \in \mathbb{F}$ konstans.

7. Adjuk meg, hogy a táblázat bal oszlopában kvadratikus alakokra megadott tulajdonság mely zérustól különböző bilineáris függvény esetén teljesül. *(2 pont)*

	kv. alak tulajdonság		bilin fv. tul
1:	azonosan nulla	A:	ferdén Hermite
2:	valós értékű	B:	Hermite
3:	képzetes	C:	valós ferdén szimmetrikus

1C, 2B, 3A (az 1C mellett a 2C is említhető, mert a 0 valós is)

8. Az alábbi táblázat bal felében mátrixtulajdonságok, jobb oldalán hasonlóságok típusai és a diagonális elemek tulajdonságaiból álló (esetleg hiányos) párok listáját találjuk. Minden sorszámozott mátrixtuljadonsághoz keressük meg a neki legjobban megfelelő hasonlóság-diagonális párt. *(2 pont)*

mátrix	hasonlóság	diagonálisok
1: valós szimmetrikus	A: unitér	egységnyi absz.ért.
2: önadjungált	B: unitér	
3: komplex normális	C: ortogonális	1×1-, 2×2-es blokk
4: valós normális	D: ortogonális	
5: unitér	E: unitér	valós

1D, 2E, 3B, 4C, 5A

9. Mit értünk mátrixnormán? *(2 pont)*

10. Mit értünk egy sajátérték algebrai és geometriai multiplicitásán? *(2 pont)*

11. Mondjuk ki a spektrálfelbontásra vonatkozó tételt! *(3 pont)*

12. Soroljuk fel a pozitív definitség mátrixfelbontásos ekvivalenseit! *(3 pont)*

13. Mondjuk ki és bizonyítsuk be a Sylvester-féle tehetetlenségi tételt! *(5 pont)*

14. Bizonyítsuk be, hogy önadjungált mátrix minden sajátértéke valós! *(5 pont)*