1	2-8	9-12	13-	Σ

NÉV ______________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 2 **1. vizsga – elmélet – elmélet** **2017-05-31**

A tesztkérdésekre 20, a definíciók, tételek precíz megfogalmazására 10, a bizonyítások tömör, világos, korrekt leírására 10 pont kapható. A válaszokat írjuk a kérdéshez tartozó üres dobozba! Kidolgozási idő 60 perc. Segédeszköz nem használható!

1. Mindegyik állításról állapítsuk meg, hogy igaz vagy hamis (I|H)! *(6 pont)*

a) A valós számsorozatok vektorterének bázisát alkotják az $e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0 \dots)$ sorozatok, ahol az e_i sorozat i-edik eleme 1, a többi 0? H

b) Minden valós mátrix ortogonálisan hasonló egy valós felsőháromszög-mátrixhoz. H

c) A sajátértékek geometriai multiplicitásainak összege egyenlő a mátrix Jordan-blokkjainak számával. I

d) A vektorterek izomorfiája ekvivalenciareláció. I

e) Minden valós négyzetes mátrix poláris felbontása egyértelmű. H

f) Komplex szimmetrikus mátrixok sajátértékei valósak. H

2. Melyik altér az alábbiak közül az $\mathbb{R}$ feletti valós $n \times n$-es mátrixok vektorterében? Az $n \times n$-es *(a)* invertálható mátrixok, *(b)* zérus mátrix egyedül, *(c)* diagonális mátrixok, *(d)* $\mathbf{A}$-val fölcserélhető mátrixok, *(e)* egész elemű mátrixok. *(2 pont)*

(a) nem, *(b)* igen, *(c)* igen, *(d)* igen, *(e)* nem.

3. Hogyan változik egy komplex bilineáris függvény $\mathbf{A}$ Gram-mátrixa, ha a $\mathcal{B}$ bázisról a $\mathcal{C}$ bázisra térünk át, és a $\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}$ áttérés $\mathbf{T}$ mátrixát ismerjük? *(2 pont)*

$\mathbf{T}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{T}$

4. Legyen $\mathcal{U} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$, legyen $\mathcal{V} \perp \mathcal{W}$. Legyen $\mathcal{U}$ bázisa $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ úgy, hogy $\mathcal{V}$ bázisa $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-1}\}$, $\mathcal{W}$ bázisa $\{\mathbf{u}_n\}$. Írjuk fel a $\mathcal{V}$ hipersíkra való tükrözés egy sajátvektorokból álló bázisára vonatkozó mátrixát. *(2 pont)*

Sajátvektorokból álló bázis: $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$, mátrix: $\mathrm{diag}(1, \dots, 1, -1)$

5. Legyen $\mathbb{F}$ egy test. Melyek az $\mathbb{F} \to \mathbb{F}$ lineáris leképezések?

Az $x \mapsto cx$ leképezések, ahol $c \in \mathbb{F}$ konstans.

6. Egy valós normális mátrix valós blokkdiagonális alakjának átlójában milyen 2×2-es és 1×1-es blokkok vannak? *(2 pont)*

ha λ valós: $[\lambda]$, ha $\lambda = a + ib$: $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$

7. Tekintsük *komplex* mátrixokon az alábbi mátrixtulajdonságokat: *(A)* önadjungált, *(B)* ferdén önadjungált, *(C)* normális, *(D)* unitér, továbbá a következőket: *(a)* unitéren diagonalizálható, *(b)* unitéren diagonalizálható egy valós diagonális mátrixszá, *(c)* unitéren diagonalizálható egy valós diagonális mátrix i-szeresévé. *(2 pont)*

Mindegyik nagybetűs tulajdonságot állítsuk párba valamelyik kisbetűssel, és jelezzük a köztük lévő implikáció irányát (azaz $X \Leftrightarrow y$, $X \Rightarrow y$, $X \Leftarrow y$ alakú kapcsolatok listáját kérjük).

$A \Leftrightarrow b$, $B \Leftrightarrow c$, $C \Leftrightarrow a$, $D \Rightarrow a$.

8. A táblázat bal felében egy valós vektortér lineáris transzformációinak listáját, jobb felében sajátértékeikre vonatkozó feltételek betűkkel jelölt listáját találjuk. Párosítsunk: melyik transzformációnak milyen sajátértékei lehetnek. *(2 pont)*

1E 2C 3D 4B 5A

sorszám	transzformáció	betű	λ
1:	szimmetrikus	A:	$\lvert\lambda\rvert = 1$
2:	antiszimmetrikus	B:	$\lambda \geq 0$
3:	nilpotens	C:	$\mathrm{i}\lambda \in \mathbb{R}$
4:	pozitív szemidefinit	D:	$\lambda = 0$
5:	unitér	E:	$\lambda \in \mathbb{R}$

9. Mit értünk azon, hogy egy $\mathcal{V}$ vektortér a $\mathcal{W}_i$ $(i = 1 \dots k)$ altereinek direkt összege? (definíció) *(2 pont)*

10. Definiálja egy mátrix minimálpolinomjának fogalmát! *(2 pont)*

11. Mondjuk ki a spektrálfelbontásra vonatkozó tételt! *(3 pont)*

12. Mondjuk ki a Fisher-egyenlőtlenségről szóló tételt! *(3 pont)*

13. Mondjuk ki és bizonyítsuk be a lineáris egyenletrendszerek optimális megoldásának QR-felbontással való előállításáról szóló tételt! *(5 pont)*

14. Igazoljuk, hogy egy valós mátrix pontosan akkor szimmetrikus, ha ortogonálisan diagonalizálható! *(5 pont)*