



BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM



Bevezetés az algebraba 2

BMETE91AM37



Differencia- és differenciálegy.-rsz.

H607 – 2017-04-05



Wetttl Ferenc

ALGEBRA TANSZÉK

Differenciaegyenlet-rendszerek

Fibonacci-sorozat explicit alakja

P A **Fibonacci-sorozat** $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987,...) explicit alakja:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

M Keressünk a rekurzív képletre $F_n = \lambda^n$ alakú megoldást!

$$\lambda^{n+1} = \lambda^n + \lambda^{n-1} \rightsquigarrow \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \rightsquigarrow \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Az $(1, \lambda_i, \lambda_i^2, \dots)$ sorozatok lin. ftlenek, ui. $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{vmatrix} \neq 0$

- Lineáris kombinációik mind megoldások: $c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$
- A kezdeti feltételek ($F_0 = 0, F_1 = 1$) kielégítéséhez megoldandó

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ c_1 \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + c_2 \frac{1 - \sqrt{5}}{2} &= 1 \end{aligned} \rightsquigarrow c_1 = -c_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Állandó együtthatós homogén lineáris differenciaegyenlet

- D d -edrendű állandó együtthatós homogén lineáris differenciaegyenlet:

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \dots + a_d x_{n-d}, \quad (\text{DAE})$$

ahol $a_1, a_2, \dots, a_d$ és a kezdeti feltételül szolgáló $x_0, x_1, \dots, x_{d-1}$ adott konstansok, $x_d, x_{d+1}, \dots$ ismeretlenek.

- Á Ha $(x_0, x_1, x_2, \dots)$ és $(y_0, y_1, y_2, \dots)$ megoldásai egy (állandó együtthatós) homogén lineáris differenciaegyenletnek, akkor tetszőleges $c, d \in \mathbb{R}$ konstansokra $(cx_0 + dy_0, cx_1 + dy_1, \dots)$ is.

- D A DAE **karakterisztikus polinomja**

$\chi(t) = t^d - a_1 t^{d-1} - a_2 t^{d-2} - \dots - a_d$, gyökei a **sajátértékek**.

- E definíció eredetét hamarosan megvilágítjuk.

Differenciaegyenlet-rendszerek

Differenciaegyenlet-rendszerek megoldása

Differenciaegyenletrendszer (DAER)

D Elsőrendű lineáris differenciaegyenlet-rendszer:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n \quad \text{homogén}$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n + \mathbf{b}_n \quad \text{inhomogén}$$

ahol $\mathbf{x}_0, \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \dots$ ismert vektorok, $\mathbf{x}_n$ ismeretlen, ha $n > 0$.

T Az elsőrendű lineáris differenciaegyenlet-rendszer megoldása

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0, \quad (\text{homogén})$$

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{A}^{n-1-i} \mathbf{b}_i, \quad (\text{inhomogén})$$

ahol $n > 0$.

B Behelyettesítés ✓. A rekurzióból következik a mo. egyértelműsége.

- F** Milyen $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrixra igaz, hogy az $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n + \mathbf{b}$ sorozat minden $\mathbf{b}, \mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ vektorra konvergens? Mi a határérték?
- M** A tétel szerint $\mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0 + (\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^{n-1})\mathbf{b}$: ekkor $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ esetén $\forall \mathbf{b}$ -re konv $\iff \mathbf{I} + \mathbf{A} + \dots + \mathbf{A}^{n-1}$ konv $\iff \rho(\mathbf{A}) < 1$
- $\rightsquigarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{A}^n = \mathbf{O}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{I} + \mathbf{A} + \dots + \mathbf{A}^{n-1} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \rightsquigarrow \mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{O}\mathbf{x}_0 + (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$, ami *nem függ* $\mathbf{x}_0$ -tól.
- P** Konvergens-e az $\mathbf{x}_n = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{n-1} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ sorozat? Mi a határértéke?
- M** $\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} - \lambda & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{3}\lambda - \frac{1}{3}$
 $\chi(-1) > 0$, $\chi(0) < 0$, $\chi(1) > 0 \rightsquigarrow \rho(\mathbf{A}) < 1 \rightsquigarrow$ a sorozat konvergens!
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$

m Minden állandó együtthatós d -edrendű homogén lineáris differenciaegyenlet átírható elsőrendű homogén lineáris differenciaegyenlet-rendszerre (DAER): ha

$x_n - a_1x_{n-1} - \dots - a_dx_{n-d} = 0$ ($x_d - a_1x_{d-1} - \dots - a_dx_0 = 0$), akkor

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{d-1} \\ x_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_d & a_{d-1} & \dots & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{d-2} \\ x_{d-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \text{ ill.}$$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+d-1} \\ x_{n+d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_d & a_{d-1} & \dots & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_{n+d-2} \\ x_{n+d-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n,$$

ahol $\mathbf{x}_n = (x_n, \dots, x_{n+d-1})$, és $\mathbf{A}$ a $\chi(t)$ kísérő mátrixának transzponáltja, melynek sajátértékei épp a DAE sajátértékei, és melyre $\mu(t) = \pm\chi(t)$, így minden sajátértékéhez egy J -blokk

Differenciaegyenlet-rendszerek

Differenciaegyenlet megoldása

T DAE összes megoldása:

1. Ha λ sajátértéke a (DAE) DAE-nek, akkor az $x_n = \lambda^n$ sorozat egy megoldás.
2. Ha a (DAE) spektruma $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$, ahol a λ_i algebrai multiplicitása a_i , akkor a (DAE) összes megoldása előáll

$$x_n = \sum_{i=1}^s \sum_{j=0}^{a_i-1} c_{ij} n^j \lambda_i^n$$

alakban. A c_{ij} együtthatók megkaphatók a kezdeti feltételekből.

3. Speciálisan, ha a (DAE) sajátértékei mind különbözőek, akkor az összes megoldás előáll

$$x_n = \sum_{i=1}^d c_i \lambda_i^n$$

alakban.

- B 1. $\chi(\lambda) = 0 \rightsquigarrow \lambda^d = a_1\lambda^{d-1} + a_2\lambda^{d-2} + \dots + a_d \rightsquigarrow$
 $\lambda^n = a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_d\lambda^{n-d} \rightsquigarrow \lambda^n$ megoldás.
- 2. $\mathbf{x}_n = \mathbf{A}\mathbf{x}_{n-1} \rightsquigarrow \mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n\mathbf{x}_0 \rightsquigarrow \mathbf{x}_n = \mathbf{C}\mathbf{J}^n\mathbf{C}^{-1}\mathbf{x}_0$.
- $\mathbf{J}^n$ egy a algebrai multiplicitású λ -hoz tartozó diagonális blokkja

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}_{a \times a}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \dots \\ 0 & \lambda^n & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda^n \end{bmatrix}.$$

- E blokk minden eleme a $\lambda^n, n\lambda^n, n^2\lambda^n, \dots, n^{a-1}\lambda^n$ elemek konstans (n -től független!) együtthatókkal vett lineáris kombinációja (pl. $\binom{n}{1}\lambda^{n-1} = (\frac{1}{\lambda})n\lambda^n$, $\binom{n}{2}\lambda^{n-2} = \frac{n^2-n}{2}\lambda^{n-2} = (\frac{2}{\lambda^2})n^2\lambda^n - (\frac{2}{\lambda^2})n\lambda^n, \dots$)
 $\rightsquigarrow \mathbf{C}\mathbf{J}^n\mathbf{C}^{-1}$ minden eleme a $\lambda_i^n, n\lambda_i^n, n^2\lambda_i^n, \dots, n^{a_i-1}\lambda_i^n$ elemek lineáris kombinációja, ahol a_i a λ_i multiplicitása.
- 3. következik az előzőből, hisz ekkor $a_i = 1$ minden $i = 1, 2, \dots, d$ -re.

P $x_n = 5x_{n-1} - 8x_{n-2} + 4x_{n-3}, x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 5.$

M $\chi(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 \rightsquigarrow$

Összes megoldás: $x_n = c_1 1^n + c_2 2^n + c_3 n 2^n.$

Kezdeti feltételekből: $c_1 = 1, c_2 = -1, c_3 = 1,$

- $x_n = 1 - 2^n + n 2^n, (0, 1, 5, 17, 49, 129, \dots)$

P $x_n = -2x_{n-1} - 5x_{n-2}, x_0 = x_1 = 1.$

M $\chi(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 5 = (\lambda + 1 - 2i)(\lambda + 1 + 2i) \rightsquigarrow$

Összes megoldás: $x_n = c_1(-1 + 2i)^n + c_2(-1 - 2i)^n.$

Kezdeti feltételekből: $c_1 = (1 - i)/2, c_2 = (1 + i)/2,$

- $x_n = \frac{1-i}{2}(-1 + 2i)^n + \frac{1+i}{2}(-1 - 2i)^n, (1, 1, -7, 9, 17, -79, \dots)$

P Konvergens-e az $x_{n+1} = \frac{1}{4}x_n - \frac{1}{4}x_{n-1} + 1$ sorozat? Mi a határértéke?

M
$$\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} - x \end{vmatrix} = (x - \frac{1}{2})^2 \rightsquigarrow$$

 $\lambda = \frac{1}{2} \rightsquigarrow \rho(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} < 1 \rightsquigarrow$ a sorozat konvergens.

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 1 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 1 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

m ha tudjuk, hogy konv, akkor tfh $x_n \rightarrow a \rightsquigarrow x_{n-1} \rightarrow a, x_{n+1} \rightarrow a$ és
 $x_{n+1} = \frac{1}{4}x_n - \frac{1}{4}x_{n-1} + 1 \rightsquigarrow a = \frac{1}{4}a - \frac{1}{4}a + 1 \rightsquigarrow a = 1.$

Differenciaegyenlet-rendszerek

Differenciaegyenletek alkalmazásai

P Számítsuk ki az alábbi n -edrendű determináns értékét:

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

M $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$, ugyanis az első sor szerint kifejtve

$$\begin{aligned} D_n &= 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{vmatrix}_{(n-1)} - (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 & & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{vmatrix}_{(n-1)} \\ &= 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{vmatrix}_{(n-1)} - \begin{vmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{vmatrix}_{(n-2)} \end{aligned}$$

$$- D_1 = 2, D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 \rightsquigarrow \lambda = 1$$

A két független megoldás $(1, 1, 1, 1, \dots)$, $(0, 1, 2, 3, \dots)$

$$- D_1: c_1 + c_2 = 2, D_2: c_1 + 2c_2 = 3 \rightsquigarrow c_1 = c_2 = 1$$

$$- \rightsquigarrow D_n = n + 1.$$

P Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha $a \in \mathbb{R}$ konstans, $a \neq k\pi$:

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\cos nx - \cos na}{\cos x - \cos a} dx$$

M $I_0 = 0$, $I_1 = \pi$, $I_{n+1} - (2 \cos a)I_n + I_{n-1} = 0$, ugyanis

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \frac{\cos nx \cos x - \sin nx \sin x - \cos na \cos a + \sin na \sin a}{\cos x - \cos a} \\ & \quad - 2 \cos a \frac{\cos nx - \cos na}{\cos x - \cos a} \\ & \quad + \frac{\cos nx \cos x + \sin nx \sin x - \cos na \cos a - \sin na \sin a}{\cos x - \cos a} dx \\ & = \int_0^\pi 2 \cos nx dx = 0, \text{ mert } n > 0. \end{aligned}$$

- $\lambda^2 - (2 \cos a)\lambda + 1 = 0 \rightsquigarrow \lambda_{1,2} = \frac{2 \cos a \pm \sqrt{4 \cos^2 a - 4}}{2} = e^{\pm ai}$
 az alapmegoldások: $(1, e^{ai}, e^{2ai}, e^{3ai}, \dots), (1, e^{-ai}, e^{-2ai}, e^{-3ai}, \dots)$.
 $c_1 + c_2 = 0, c_1 e^{ai} + c_2 e^{-ai} = \pi \rightsquigarrow$
 $c_1(2i \sin a) = \pi \rightsquigarrow c_1 = \frac{\pi}{2i \sin a}$
- $I_n = \frac{\pi}{2i \sin a}(\cos na + i \sin na) - \frac{\pi}{2i \sin a}(\cos na - i \sin na) = \pi \frac{\sin na}{\sin a}$

Differenciálegyenlet-rendszerek

D Elsőrendű explicit nemlineáris differenciálegyenlet-rendszer:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \text{ ahol } \mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Autonóm, ha időfüggetlen:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \text{ ahol } \mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (1)$$

Állandó együtthatós homogén lineáris (autonóm lineáris), ha

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \text{ ahol } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}. \quad (2)$$

Az autonóm DER egy konstans $\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}$ megoldását **egyensúlyi helyzetnek** vagy **egyensúlyi pontnak** nev.

Á A konstans $\mathbf{u}$ pontosan akkor egyensúlyi pontja az (1) egyenletnek, ha $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

Á Invertálható $\mathbf{A}$ esetén a (2) lineáris DER egyetlen egyensúlyi helyzete a $\mathbf{0}$.

T $\forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \forall t_0 \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \exists^1 \mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ diffható függvény, hogy $\forall t \in \mathbb{R} : \mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ és $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.

D Az $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ feltételt **kezdeti feltételnek**, az $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{Ax}(t)$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ egyenleteket **kezdetiérték-problémának** hívjuk. Az $\{\mathbf{x}(t) \mid t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz az $\mathbf{x}(t)$ **trajektóriája**.

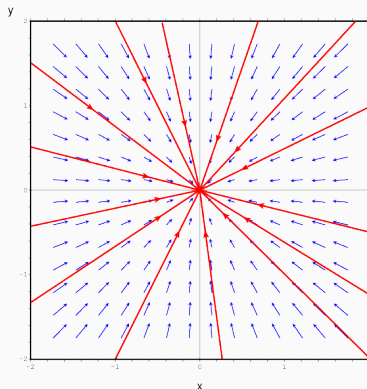
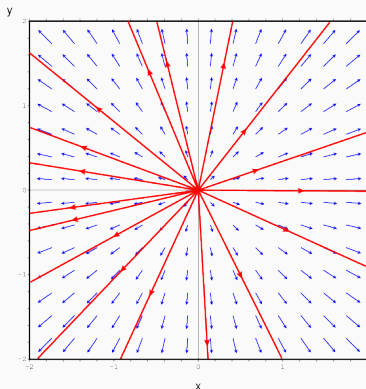
m A tétel szerint a $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{Ax}(t)$ DER megoldásainak trajektóriái átfedés nélkül lefedik $\mathbb{R}^n$ minden pontját.

P $\mathbf{x}' = \mathbf{Ix}$ mo: $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^t \\ c_2 e^t \\ \vdots \\ c_n e^t \end{bmatrix} = e^t \mathbf{c}$, $\mathbf{x}' = -\mathbf{Ix}$ mo: $\mathbf{x}(t) = e^{-t} \mathbf{c}$.

A trajektóriák az első esetben az origóból induló, de azt nem tartalmazó félegyenesek, és az origó, a második esetben az origóba futó, de azt nem tartalmazó félegyenesek, és az origó.

Fázisportrék $\mathbb{R}^2$ -ben

Fázisportré: néhány trajektóriát és/vagy néhány x pontban az x' irányát jelző vektort ábrázol a fázissíkon:

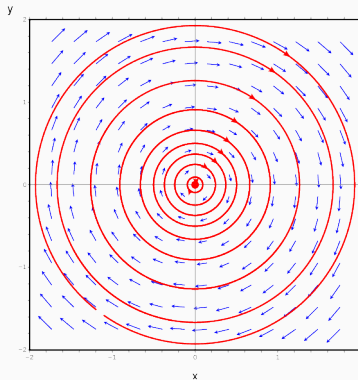


Az $x' = lx$ és az $x' = -lx$ differenciálegyenlet-rendszerek fázisportréi.

P Oldjuk meg az $x_1' = x_2$, $x_2' = -x_1$, azaz $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$ DER-t!

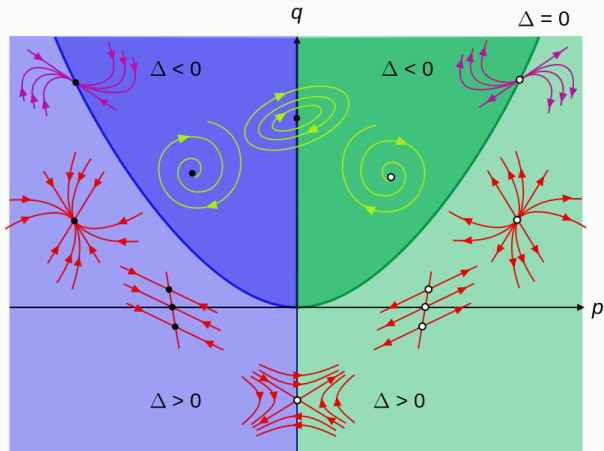
M Nyilván megoldások az $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} c \sin t \\ c \cos t \end{bmatrix}$, $c \geq 0$ vektorértékű függvények. Mivel ezek a sík minden pontján átmennek, megadtuk az összes megoldást!

- A fázisportré:



- D Az autonóm $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ($\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$) egyenletrendszerek megoldásai az $\mathbb{R}^n$ térben görbeként ábrázolhatók. Az $\mathbb{R}^n$ teret fázistérnek, a trajektóriákat, és/vagy egy rács $\mathbf{x}$ pontjaiba húzott $\mathbf{x}'$ vektorokat is tartalmazó ábrát fázisportrének nevezik.
- Egy „phase portrait” mathlet
 - A [Wikipédia a fázis-síkról](#), és az onnan származó rajz a következő oldalon:

A fázisportrék kapcsolata az együtthatómátrixszal



$$\frac{dx}{dt} = Ax + By$$

$$\frac{dy}{dt} = Cx + Dy$$

$$p = A + D$$

$$q = AD - BC$$

$$\Delta = p^2 - 4q$$

- D Az (a, b) intervallumon értelmezett $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ függvények függetlenek (a, b) -n, ha $c_1\mathbf{x}_1(t) + \dots + c_n\mathbf{x}_n(t) = \mathbf{0}$ csak akkor állhat fenn minden $t \in (a, b)$ helyen, ha $c_1 = \dots = c_n = 0$.
- Á Az $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$ DER megoldásai n -dimenziós alteret alkotnak az $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvények terében.
- B Ha $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ megoldás, $c \in \mathbb{R}$, akkor $c\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ is $\rightsquigarrow$ alteret alkotnak.
- L! $\mathbf{x}_i$ megoldása az $\mathbf{x}_i(0) = \mathbf{e}_i$ kezdetiérték-problémának ($i = 1, \dots, n$).
 - $\forall \mathbf{x}_0$ előáll az $\mathbf{e}_i$ -k lin.komb.jaként $\rightsquigarrow \forall$ k.é.p-nak van megoldása, ami az $\mathbf{x}_i$ -k lin.komb.-jaként megkapható.
 - Az $\mathbf{x}_i$ megoldások függetlenek, mert az $\mathbf{e}_i$ -k is azok.
- K Az összes megoldáshoz elég n független megoldást találni.
- D Az $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$ DER megoldásai terének valamely bázisát **alaprendszernek** nevezzük.

L A Jordan-blokkok függvénye alapján

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} \text{ esetén } e^{Jt} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{t^{n-3}}{(n-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

L $(e^{At})' = Ae^{At}$

B $(e^{At})' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (At)^k \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} A^k t^{k-1} =$

$$A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} A^{k-1} t^{k-1} = Ae^{At}.$$

Lineáris DER megoldása

- T Az $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ kezdetiérték-probléma megoldása $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0$.
- B $(e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0)' = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0$, vagyis megoldás, másrészt kielégíti a kezdeti feltételt, ui. $e^{\mathbf{A}0}\mathbf{x}_0 = \mathbf{I}\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$.
- K Minden kezdeti feltételhez egyetlen megoldás van, és az összes megoldást megadja.
- K $e^{\mathbf{A}t}$ oszlopvektorai alaprendszert alkotnak.
- B Mivel minden megoldáshoz tartoznak kezdeti feltételek, és minden kezdetiérték-probléma megoldható az $e^{\mathbf{A}t}$ oszlopainak lineáris kombinációjaként, ezért minden megoldás $e^{\mathbf{A}t}$ oszlopainak lineáris kombinációja.

P Oldjuk meg az

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

1M $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 \rightsquigarrow \lambda_{1,2} = 3$

- Sajátvektor: $(1, 1)t$, Jordan-lánc: $(-1, -1) \leftarrow (1, 0)$

- $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

- $e^{\mathbf{J}t} = \begin{bmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$, $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{C}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{C}^{-1} = e^{3t} \begin{bmatrix} -t+1 & t \\ -t & t+1 \end{bmatrix}$

- Az általános megoldás: $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0$

- $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = e^{3t} \begin{bmatrix} -t+1 & t \\ -t & t+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = e^{3t} \begin{bmatrix} t+1 \\ t+2 \end{bmatrix}$

$$2M \quad \chi_A(\lambda) = (\lambda - 3)^2, J = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}; \lambda_1 = 3, m_1 = 2, j = 0, 1, i = 1 \text{ a}$$

$$p^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_i), \quad j = 0, 1, \dots, m_i - 1, \quad i = 1, \dots, k$$

képletben.

- $f(x) = e^{xt}, f'(x) = te^{xt},$
- $p(x) = ax + b, p'(x) = a,$

$$\begin{array}{ll} f(3) = p(3) & e^{3t} = 3a + b \\ f'(3) = p'(3) & te^{3t} = a \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ll} a = te^{3t} \\ b = (1 - 3t)e^{3t} \end{array} \rightsquigarrow$$

- $p(x) = te^{3t}x + (1 - 3t)e^{3t} \rightsquigarrow$

$$e^{At} = p(A) = te^{3t} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + (1 - 3t)e^{3t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = e^{3t} \begin{bmatrix} -t + 1 & t \\ -t & t + 1 \end{bmatrix}$$

- $x(t) = e^{At} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = e^{3t} \begin{bmatrix} -t + 1 & t \\ -t & t + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = e^{3t} \begin{bmatrix} t + 1 \\ t + 2 \end{bmatrix}$

P Oldjuk meg (az előző feladat alapján) az

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

kezdetiérték-problémát!

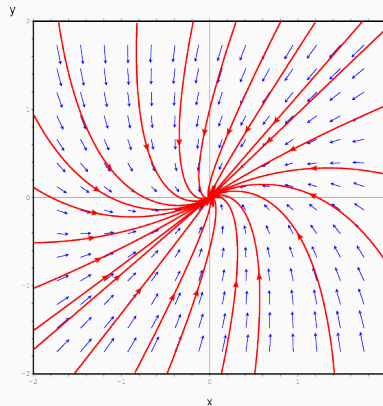
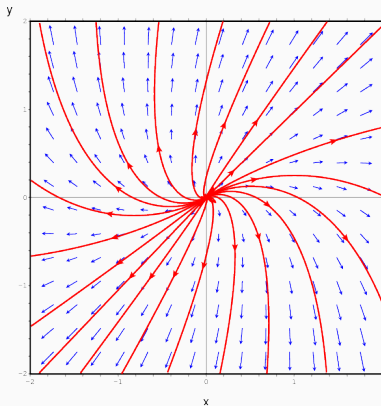
M Az együtthatómátrix -1 -szerese az előző feladaténak, így a sajátértékek $\lambda_{1,2} = -3 \rightsquigarrow p(x) = te^{-3t}x + (1+3t)e^{-3t}$

$\rightsquigarrow$ az általános megoldás:

$$te^{-3t} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} + (1+3t)e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = e^{-3t} \begin{bmatrix} t+1 & -t \\ t & -t+1 \end{bmatrix}$$

$$\text{A k.é.p. megoldása: } e^{-3t} \begin{bmatrix} t+1 & -t \\ t & -t+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = e^{-3t} \begin{bmatrix} -t+1 \\ -t+2 \end{bmatrix}$$

Fázisportrék



Az $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}$ és az $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}$ differenciálegyenlet-rendszerek fázisportréi.

P Adjuk meg az $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$ összes megoldását!

M $\chi(\lambda) = \lambda^2 + 1, \lambda = \pm i$

Az Hermite-polinom $p(x) = ax + b$, a függvény $f(x) = e^{xt}$:

$$\begin{cases} x = i: & e^{ti} = \cos t + i \sin t = ai + b & a = \sin t \\ x = -i: & e^{-ti} = \cos t - i \sin t = a(-i) + b & \rightsquigarrow b = \cos t \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow p(x) = (\sin t)x + \cos t$$

- A mátrix behelyettesítése: $e^{At} = p(\mathbf{A}) = (\sin t)\mathbf{A} + (\cos t)\mathbf{I} = \sin t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \cos t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}.$

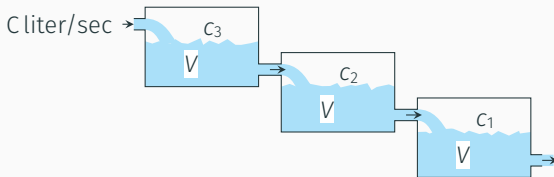
$$\text{Az összes megoldás: } \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \mathbf{x}_0$$

F Korábban azt kaptuk, hogy az összes megoldás $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} c \cos t \\ c \sin t \end{bmatrix}.$

Van különbség a két eredmény között? Vagy csak más alakban kaptuk meg ugyanazt?

Egy alkalmazás

- P Három tartály mindegyikében szennyezett víz van, a szennyezőanyag mennyisége kezdetben c_1 , c_2 , c_3 a V liter mennyiségű vízben. A harmadik tartályba tiszta víz folyik C liter/sec sebességgel, minden tartályból ugyanekkora sebességgel folyik ki az összekeveredett víz. Mennyi a szennyezőanyag mennyisége a tartályokban $t > 0$ esetén, ha feltételezzük, hogy a víz nagyon gyorsan és egyenletesen összekeveredik.



M Jelölje $x_i(t)$ az i -edik tartálybeli szennyező mennyiségét. Δt idő alatt $C\Delta t$ mennyiségű tiszta víz folyik be, ugyanennyi ki, de a befolyó szennyező mennyisége 0, a kifolyóé $\frac{x_3(t)}{V}C\Delta t$. Így

$$\frac{\Delta x_3(t)}{\Delta t} = \frac{0 - \frac{x_3(t)}{V}C\Delta t}{\Delta t} \rightsquigarrow x'_3(t) = -\frac{C}{V}x_3(t).$$

A másik két tartályba van befolyó szennyezés is, így a kapott három differenciálegyenlet mátrixalakban a következő:

$$\begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ x'_3(t) \end{bmatrix} = \frac{C}{V} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

- Az e^{At} az $\mathbf{A}$ Jordan-alakjából leolvasható, mivel az épp a Jordan-alak konstansszorosa. Így elég e^{At} helyett $e^{\frac{c}{v}tJ}$ -t számolni:

$$e^{At} = e^{\frac{c}{v}tJ} = e^{-\frac{c}{v}t} \begin{bmatrix} 1 & \frac{c}{v}t & \frac{1}{2}(\frac{c}{v}t)^2 \\ 0 & 1 & \frac{c}{v}t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Innen a megoldás, figyelembe véve a kezdeti feltételeket is:

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = e^{-\frac{c}{v}t} \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \frac{c}{v}t + c_3 \frac{1}{2}(\frac{c}{v}t)^2 \\ c_2 + c_3 \frac{c}{v}t \\ c_3 \end{bmatrix}$$

Megoldások függetlensége

T Ha a $W(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t))$ **Wronski-determináns** legalább egy pontban nem 0, akkor a függvények függetlenek, ahol

$$W(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{21}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ x_{12}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{n2}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n}(t) & x_{2n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

ahol $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$.

B trivi: ha W egy t helyen nem 0, akkor a c_i -kre vonatkozó egyenletrendszer egyértelműen megoldható! (A tétel megfordítása nem igaz pl. $(t^2, t), (t, 1)$.)

- P** Az $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ DER alaprendszerét alkotják $e^{\mathbf{A}t}$ oszlopai. Igazoljuk Wronski-determinánssal, hogy ezek lineárisan független függvények!
- M** Az alaprendszer Wronski-detrminánása $\det(e^{\mathbf{A}t})$.
 $\det(e^{\mathbf{A}t}) = e^{t \sum_j \lambda_j} \neq 0$ egyetlen t helyen sem.

Differenciálegyenlet-rendszerek

Stabilitás

D AMH az $\mathbf{u}$ egyensúlyi helyzetet **stabil**, ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha bármely olyan $\mathbf{x}(t)$ megoldásra, melyre $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ és $|\mathbf{x}_0 - \mathbf{u}| < \delta$, igaz hogy $|\mathbf{x}(t) - \mathbf{u}| < \varepsilon$ a $t \geq 0$ intervallumon.

AMH az $\mathbf{u}$ egyensúlyi helyzet **instabil**, ha nem stabil.

AMH az $\mathbf{u}$ egyensúlyi helyzetet **aszimptotikusan stabil**, ha stabil, és van olyan $\alpha > 0$, hogy ha $|\mathbf{x}_0 - \mathbf{u}| < \alpha$, akkor $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{u}$.

T Legyen $\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$. A $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ DER $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ megoldása

- pontosan akkor aszimptotikusan stabil, ha $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ minden $i = 1, \dots, s$ esetén.
- pontosan akkor stabil, ha $\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0$ minden sajátértékre, és ha valamelyik λ_i sajátértékre $\operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$, akkor a geometriai és algebrai multiplicitások egyenlők.
- instabil, ha $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$ valamely $i = 1, \dots, s$ esetén.

P Jellemezzük a stabilitását az $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ egyensúlyi helyzetnek az $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ DER esetén, ha $\mathbf{A}$ a következő mátrixok valamelyike:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (b) \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad (c) \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (d) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

M (a) s.ért.: 1, -1, van köztük pozitív $\rightsquigarrow$ instabil

(b) s.ért.: -2, de $\operatorname{Re}(-2) = -2 < 0 \rightsquigarrow$ aszimptotikusan stabil

(c) s.ért.: 0, -1, -2, mindegyik ≤ 0 , a 0 algebrai és geometriai multiplicitása azonos $\rightsquigarrow$ stabil

(d) s.ért.: $\pm i$, $\operatorname{Re}(\pm i) = 0$, algebrai és geometriai multiplicitásuk azonos $\rightsquigarrow$ stabil (ld. a korábbi fázisportré koncentrikus köreit)

m Ha a kezdeti feltételen „kicsit” változtatunk, azaz $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ helyett $\mathbf{y}(0) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$ kezdeti feltételt vizsgáljuk, akkor az $\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)$ különbség $\mathbf{0}$ egyensúlyi helyzethez való viszonya jellemzi az $\mathbf{x}(t)$ stabilitását is, azaz az $\mathbf{x}(t)$ stabilitása megegyezik a $\mathbf{0}$ stabilitásával.

Differenciálegyenlet-rendszerek

Differenciálegyenletek

Lineáris DE visszavezetése lineáris DER-re

Á Az $y^{(n)} = a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y$ DE ekvivalens a következő DER-rel:

$$\begin{bmatrix} y^{(n)} \\ y^{(n-1)} \\ \vdots \\ y'' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^{(n-1)} \\ y^{(n-2)} \\ \vdots \\ y' \\ y \end{bmatrix}$$

P Vezessük vissza az $y''' + y'' - 2y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 6$ kezdetiérték-problémát egy megfelelő DER kezdetiérték-problémájára, és oldjuk meg.

M A DE-hez tartozó DER:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y'' \\ y' \\ y \end{bmatrix} \text{ jelöléssel: } \begin{bmatrix} y''' \\ y'' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'' \\ y' \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

- Meghatározzuk a DE általános megoldását.

s.ért.: $\lambda = 0, 1, -2$ a Jordan-normálalak: $\mathbf{J} = \text{diag}(0, 1, -2) \rightsquigarrow e^{\mathbf{J}t} = \text{diag}(1, e^t, e^{-2t}) \rightsquigarrow \mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{y}_0 = \mathbf{C}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{y}_0$, ahol $\mathbf{C}$ oszlopai a Jordan-bázis elemei. Ezeket nem kell meghatároznunk, elég annyi, hogy $y(t)$ az $\mathbf{y}(t)$ harmadik koordinátája, amely a $\mathbf{J}$ átlójában lévő függvények lineáris kombinációja, így a DE általános megoldása

$$y(t) = c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{-2t}.$$

- Megoldjuk a kezdetiérték-problémát! Ehhez már nincs szükség a DER-re:

$$\begin{array}{lll} y = c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{-2t} & y(0) = 2 = c_1 + c_2 + c_3 & c_1 = -1 \\ y' = c_2 e^t - 2c_3 e^{-2t} & \rightsquigarrow y'(0) = 0 = c_2 - 2c_3 & \rightsquigarrow c_2 = 2 \\ y'' = c_2 e^t + 4c_3 e^{-2t} & y''(0) = 6 = c_2 + 4c_3 & c_3 = 1 \end{array}$$

A k.é.p. megoldása $y = -1 + 2e^t + e^{-2t}$.

Wronski-determináns

- D Az I intervallumon értelmezett és ott legalább $n - 1$ -szer diffható $y_1, y_2, \dots, y_n$ függvények Wronski-determinánsán a

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

függvényt értjük.

- T Ha az I intervallumon értelmezett és ott legalább $n - 1$ -szer diffható $y_1, y_2, \dots, y_n$ függvények Wronski-determinánsa az I -n nem azonosan 0, akkor e függvények lineárisan függetlenek.
- P A $\{\cos t, t \cos t\}$ függvények bármely (a, b) , $(a > b)$ intervallumon függetlenek, mert $W(t) = \begin{vmatrix} \cos t & t \cos t \\ -\sin t & \cos t - t \sin t \end{vmatrix} = \cos^2 t$ bármely intervallum legalább egy pontjában nem 0.

B $c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n = 0 \rightsquigarrow c_1y_1^{(k)} + c_2y_2^{(k)} + \dots + c_ny_n^{(k)} = 0$
 $(k = 0, 1, \dots, n-1)$

Az egyenletrendszer együtthatómátrixának determinánsa

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

ami ha valamely $t \in I$ helyen nem 0, az egyenletrendszer egyértelműen megoldható.

m Az állítás megfordítása nem igaz:

$$y_1 = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases} \quad y_2 = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x < 0, \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

$W(y_1, y_2) = 0$, de a fv-ek függetlenek.